

**Диференциални уравнения и приложения с
Mathematica, Matlab и Maple**

2010/2011

Проект 2

Задача 1. Дадена е смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} - u_t & 0 < x < 3, \ t > 0 \\u(0, t) &= 0 & , t > 0 \\u(3, t) &= 0 & , t > 0 \\u(x, 0) &= 0 & , 0 < x < 3 \\u_t(x, 0) &= x(x-2)(x-3) & , 0 < x < 3.\end{aligned}$$

Решението на задачата с метода на Фурие се дава чрез формулите

$$u(x, t) = e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) \sin(\alpha_k t),$$

където

$$A_k = \frac{2}{3\alpha_k} \int_0^3 x(x-2)(x-3) \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) dx, \quad \alpha_k = \frac{1}{3} \sqrt{k^2 \pi^2 - 9}$$

За парциалната сума $U_m(x, t)$ от първите $m = 40$ члена на реда, направете анимация от графиките на функциите $U_m(x, t_0)$ за фиксирано време t_0 , като на t_0 задавате последователно стойности от 0 до 3 със стъпка 0.04.

Задача 2. Дадена е задачата за уравнението на топлопроводността

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} & 0 < x < 4, \ t > 0 \\u(0, t) &= -\sin(8t^2) & , t > 0 \\u(4, t) &= 2t^2 & , t > 0 \\u(x, 0) &= |x-2| - 2 & , 0 < x < 4.\end{aligned}$$

Решете приближено задачата за $t \in [0, 0.5]$ с помощта на диференчна схема с подходяща стъпка. Направете анимация от графиките на функцията в отделните слоеве.