

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
14.02.2009 г.

Задача 1. Да се реши матричното уравнение
 $XA = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Нека e_1, e_2, e_3 е базис на реалното тримерно пространство V , φ е линеен оператор във V такъв, че

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= -3e_1 + 4e_2 \\ \varphi(e_2) &= -e_1 + 2e_2,\end{aligned}$$

и векторът $v = e_1 + e_2 + e_3$ принадлежи на ядрото $\text{Ker } \varphi$.

а) Да се намери матрицата на оператора φ в базиса

$$e_1, e_2, v.$$

б) Да се намери базис на V , в който матрицата на оператора е диагонална, както и тази диагонална матрица.

в) За кои стойности на параметъра λ векторът

$$v = 2e_1 + \lambda e_2 + (\lambda - 1)e_3$$

принадлежи на $\text{Im } \varphi$.

Задача 3. Нека V е n -мерно линейно пространство, φ е линеен оператор във V с матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

в даден базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Ако

$$\dim \text{Ker } \varphi = n - 1,$$

докажете, че

а) за всеки вектор $x \in V$, $x \notin \text{Ker } \varphi$ векторът $\varphi(x)$ е собствен вектор на φ ;

б) съществува базис на V , в който матрицата на оператора φ има вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

където $\lambda = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
2					
Име:					

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
14.02.2009 г.

Задача 1. Да се реши матричното уравнение
 $XA = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Нека e_1, e_2, e_3 е базис на реалното тримерно пространство V , φ е линеен оператор във V такъв, че

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= 2e_1 + 3e_2 \\ \varphi(e_2) &= -e_1 - 2e_2,\end{aligned}$$

и векторът $v = e_1 + e_2 + e_3$ принадлежи на ядрото $\text{Ker } \varphi$.

а) Да се намери матрицата на оператора φ в базиса

$$e_1, e_2, v.$$

б) Да се намери базис на V , в който матрицата на оператора е диагонална, както и тази диагонална матрица.

в) За кои стойности на параметъра λ векторът

$$v = 2e_1 - \lambda e_2 + (\lambda - 2)e_3$$

принадлежи на $\text{Im } \varphi$.

Задача 3. Нека V е n -мерно линейно пространство, φ е линеен оператор във V с матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

в даден базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Ако

$$\dim \text{Ker } \varphi = n - 1,$$

докажете, че

а) за всеки вектор $x \in V$, $x \notin \text{Ker } \varphi$ векторът $\varphi(x)$ е собствен вектор на φ ;

б) съществува базис на V , в който матрицата на оператора φ има вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

където $\lambda = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
3					
Име:					

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
14.02.2009 г.

Задача 1. Да се реши матричното уравнение
 $XA = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 3 & -1 \\ 7 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Нека e_1, e_2, e_3 е базис на реалното тримерно пространство V , φ е линеен оператор във V такъв, че

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= 3e_1 + 4e_2 \\ \varphi(e_2) &= -e_1 - 2e_2,\end{aligned}$$

и векторът $v = e_1 + e_2 + e_3$ принадлежи на ядрото $\text{Ker } \varphi$.

а) Да се намери матрицата на оператора φ в базиса

$$e_1, e_2, v.$$

б) Да се намери базис на V , в който матрицата на оператора е диагонална, както и тази диагонална матрица.

в) За кои стойности на параметъра λ векторът

$$v = 4e_1 + \lambda e_2 + (\lambda - 3)e_3$$

принадлежи на $\text{Im } \varphi$.

Задача 3. Нека V е n -мерно линейно пространство, φ е линеен оператор във V с матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

в даден базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Ако

$$\dim \text{Ker } \varphi = n - 1,$$

докажете, че

а) за всеки вектор $x \in V$, $x \notin \text{Ker } \varphi$ векторът $\varphi(x)$ е собствен вектор на φ ;

б) съществува базис на V , в който матрицата на оператора φ има вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

където $\lambda = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
4					
Име:					

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
14.02.2009 г.

Задача 1. Да се реши матричното уравнение
 $XA = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & -5 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Нека e_1, e_2, e_3 е базис на реалното тримерно пространство V , φ е линеен оператор във V такъв, че

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= e_1 + 3e_2 \\ \varphi(e_2) &= e_1 - e_2,\end{aligned}$$

и векторът $v = e_1 + e_2 + e_3$ принадлежи на ядрото $\text{Ker } \varphi$.

а) Да се намери матрицата на оператора φ в базиса

$$e_1, e_2, v.$$

б) Да се намери базис на V , в който матрицата на оператора е диагонална, както и тази диагонална матрица.

в) За кои стойности на параметъра λ векторът

$$v = e_1 + \lambda e_2 + (\lambda - 4)e_3$$

принадлежи на $\text{Im } \varphi$.

Задача 3. Нека V е n -мерно линейно пространство, φ е линеен оператор във V с матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

в даден базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Ако

$$\dim \text{Ker } \varphi = n - 1,$$

докажете, че

а) за всеки вектор $x \in V$, $x \notin \text{Ker } \varphi$ векторът $\varphi(x)$ е собствен вектор на φ ;

б) съществува базис на V , в който матрицата на оператора φ има вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

където $\lambda = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.