

ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА – ДОМАШНА РАБОТА №3

За всеки студент a, b, c са последните 3 цифри от факултетния му номер:

$$\boxed{\phi.N_{\text{—}}^0 \ * \ * \ a \ b \ c} \quad \text{и} \quad \boxed{p = |a - b + c| + 1}, \quad \boxed{k = 2 + (-1)^{|a-b|+|c-3|}}.$$

Задача. 1. Нека $U(2, \mathbb{R}) = \left\{ Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ е групата от реалните унитарни матрици.

- а) Да се докаже, че $U(2, \mathbb{R})$ е реално линейно пространство и да се намери един негов базис.
б) Да се изследват за линейна зависимост (независимост) матриците

$$Z_1 = \begin{pmatrix} c-a & p \\ -p & c-a \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Z_2 = \begin{pmatrix} c-p & c+k \\ -k-c & c-p \end{pmatrix}.$$

Задача 2. В линейното пространство $\mathbb{R}^4$ относно стандартния му базис $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ са дадени векторите

$$a_1 = ce_2 + be_3 + ae_4, \quad a_2 = (c-a, -a, b-c, c-a), \quad a_3 = (c-a, c-a, 2b-c, c).$$

- а) Да се изследва за линейна зависимост (независимост) системата вектори $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и да се определи $\text{rank} \mathcal{A}$.
б) Да се намери един базис $\mathcal{A}'$ на линейната обвивка $L(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}'$ да се допълни до базис на $\mathbb{R}^4$.

Задача 3. В реалното линейно пространство $\mathbb{R}^3$ относно стандартния му базис $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ са дадени векторът $d = (3, 0, -1)$, системата вектори

$$\mathcal{A} = \{a_1 = a^2 \cdot e_1 + (c^2 - b^2)e_3; a_2 = (0, p, k); a_3 = (a, b(-1)^p, c(-1)^k)\}$$

и линейният оператор φ с матрицата си $A = \begin{pmatrix} c & b & 0 \\ b & c & 0 \\ p & k & a \end{pmatrix}$.

- а) Да се докаже, че $\mathcal{A}$ е базис на $\mathbb{R}^3$ и да се намерят координатите на d и матрицата на φ спрямо базиса $\mathcal{A}$.
б) Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на φ . Образуват ли собствените вектори базис на $\mathbb{R}^3$?

Точки:

зад.1-а)=2т., зад.1-б)=2т., зад.2-а)=2т., зад.2-б)=3т., зад.3-а)=3т., зад.3-б)=4т.;
Оценка=2+(брой точки):4.

Забележка. ДР№3 се пише на БЕЛИ листове, като всяка задача е на отделен лист. Страниците се номерират, като на първа страница се записват трите имена, специалност, курс, факултетен номер, а в горния десен ъгъл на всяка друга страница се записва $\boxed{DR-3-LA-mncde}$, където m, n, a, b, c са последните пет цифри на факултетния номер на студента. Листовите се преснимат или сканират и се обединяват в един pdf-файл: $\boxed{DR-3-LA-mnabc.pdf}$ (в краен случай се архивират във файл с наименование: $\boxed{DR-3-LA-mnabc.zip(rar)}$).

Този файл се изпраща на асистент Ангелов.

Срокът за представяне на Домашна работа №3 е 14.01.2022 до 12:00 часа.

Важно. Оценката от ДР №3 е самостоятелна и не повишава тази от ДР №2 .