

Домашна работа върху метод на допирателните (Нютон) за решаване на уравнения

p=0,q=1

Зад1.

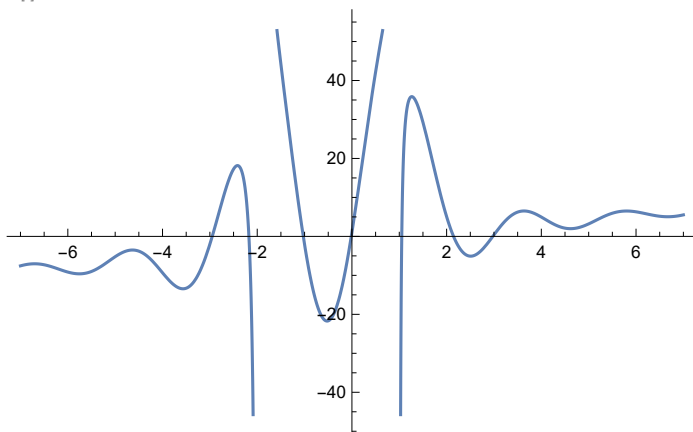
(Debug) In[3]:=

$$f[x_] := \frac{x^3 + 0 * x - (1 + 50) * \text{Sin}[3 x] - 2 (0 + 1)}{(x - 1) * (x + 2)}$$

(Debug) In[16]:=

Plot[f[x], {x, -7, 7}]

(Debug) Out[16]:=



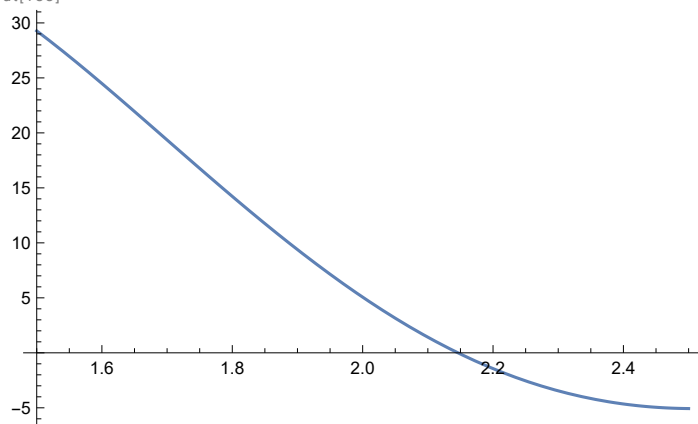
Извод:Общия брой корени на уравнението е 7.Дефиниционната област е $(x-1)*(x+2) \neq 0, x \neq 1, x \neq -2$.

б)

```
(Debug) In[133]:=
```

```
Plot[f[x], {x, 1.5, 2.5}]
```

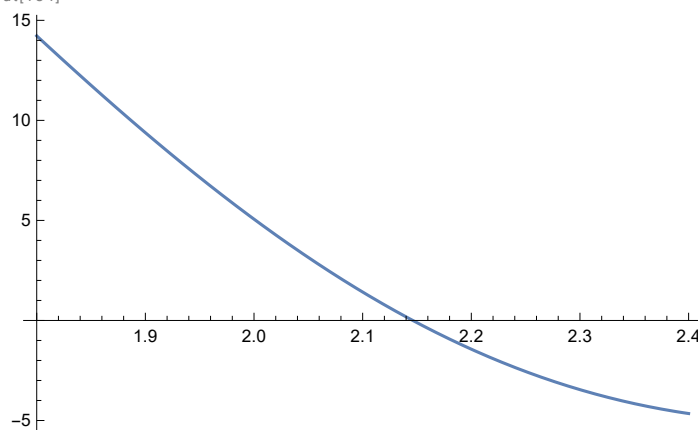
```
(Debug) Out[133]=
```



```
(Debug) In[134]:=
```

```
Plot[f[x], {x, 1.8, 2.4}]
```

```
(Debug) Out[134]=
```



```
(Debug) In[135]:=
```

```
f[1.8]
```

```
(Debug) Out[135]=
```

```
14.2247
```

```
(Debug) In[136]:=
```

```
f[2.4]
```

```
(Debug) Out[136]=
```

```
-4.65147
```

Извод:

(1) $f(x)$ е непрекъсната в избрания интервал $[1.8; 2.4]$, защото точките на прекъсване $x \neq -2$, $x \neq 1$ остават извън посочения интервал.

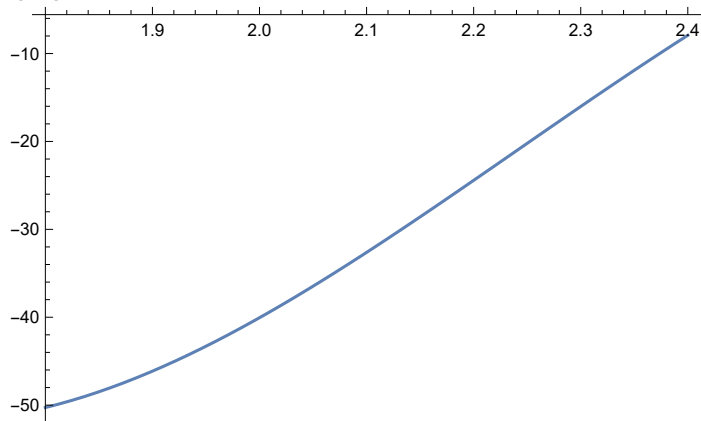
(2) $f(1.8) = 14.22... > 0$, $f(2.4) = -4.65... < 0$. Следователно $f(1.8) \cdot f(2.4) < 0$.

От (1) и (2) следва, че в интервала $[1.8; 2.4]$ съществува поне един корен.

```
(Debug) In[140]:=
```

```
Plot[f' [x], {x, 1.8, 2.4}]
```

```
(Debug) Out[140]=
```

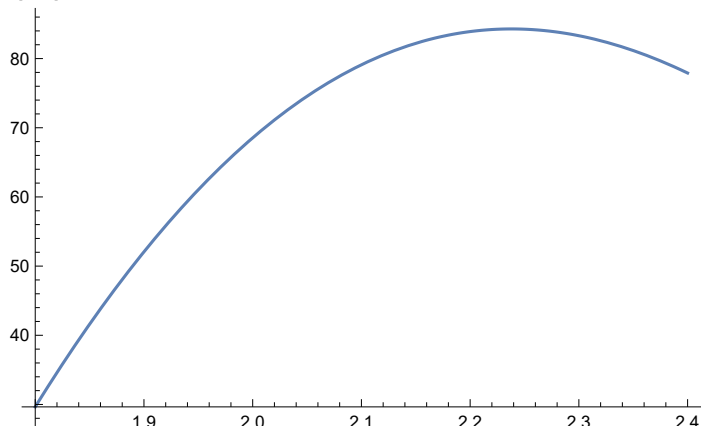


Извод:(3) Стойностите на първата производна са между $[-50; 0)$. Следователно в посочения интервал $[1.8; 2.4]$ първата производна има само отрицателни стойности.

```
(Debug) In[138]:=
```

```
Plot[f'' [x], {x, 1.8, 2.4}]
```

```
(Debug) Out[138]=
```



Извод : (4)Стойностите на втората производна са между $[30; 100]$. Следователно в посочения интервал $[1.8; 2.4]$ втората производна има само положителни стойности .

Извод : От (3) и (4) следва, че методът на Нютон е приложим за посочения интервал (условията за сходимост са изпълнение).

г)

$x_0 = ?$, такова че $f(x_0) \cdot f'(x) > 0$.

Т.к. в дадената задача $f'(x) < 0$ (вж. (4)), следва да изберем x_0 така, че $f(x_0) < 0$.

```
(Debug) In[141]:=
```

```
f[2.4]
```

```
(Debug) Out[141]=
```

```
-4.65147
```

```
(Debug) In[142]:=
```

```
x0 = 2.4
```

```
(Debug) Out[142]=
```

```
2.4
```

Д)

Определяне на постоянните величини

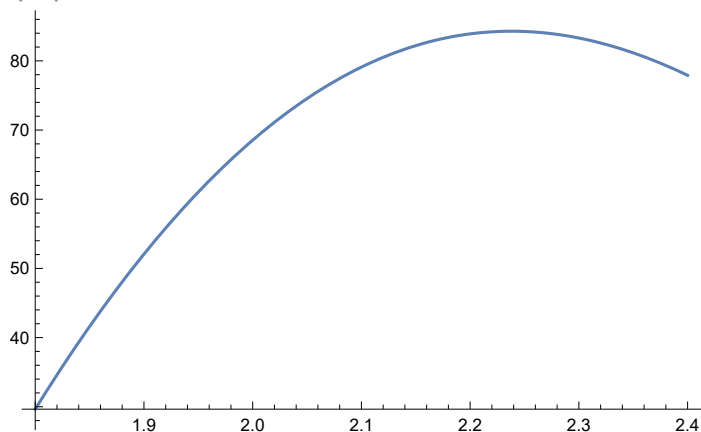
$M_2 = ?$, $m_1 = ?$

$M_2 = ?$

```
(Debug) In[143]:=
```

```
Plot[Abs[f''[x]], {x, 1.8, 2.4}]
```

```
(Debug) Out[143]=
```



От геометрични съображения следва, че максимумът се достига в десния край на интервала.

```
(Debug) In[208]:=
```

```
M2 = Abs[f''[2.4]]
```

```
(Debug) Out[208]=
```

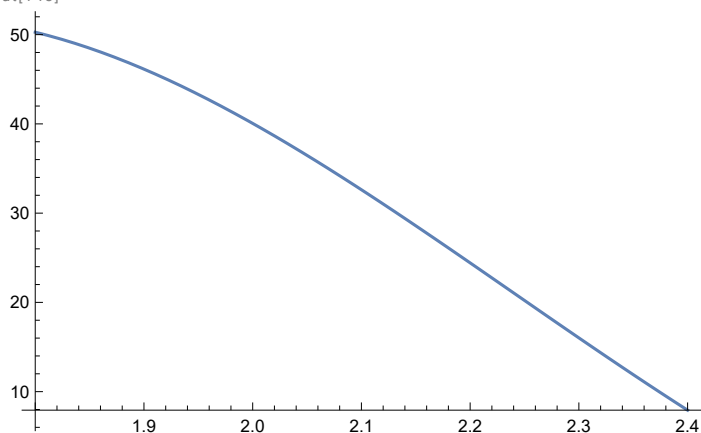
```
77.9105
```

$m_1 = ?$

```
(Debug) In[145]:=
```

```
Plot[Abs[f'[x]], {x, 1.8, 2.4}]
```

```
(Debug) Out[145]=
```



От геометрични съображения следва, че минимумът се достига в левия край на интервала.

(Debug) In[210]:=

m1 = Abs[f'[1.8]]

(Debug) Out[210]=

50.2702

(Debug) In[211]:=

k = $\frac{M2}{2 m1}$

(Debug) Out[211]=

0.774917

(Debug) In[212]:=

f[x_] := $\frac{x^3 + 0 * x - (1 + 50) * \text{Sin}[3 x] - 2 (0 + 1)}{(x - 1) * (x + 2)}$ **b = 2.4; a = 1.8;****x0 = 2.4;****M2 = Abs[f''[2.4]];****m1 = Abs[f'[2.4]];****k = $\frac{M2}{2 m1}$;****Print["n = ", 0, " x_n = ", x0, " f(x_n) = ", f[x0], " f'(x_n) = ", f'[x0]]****ezad = 10⁻¹⁷;****e = Infinity;****For[n = 1, e ≥ ezad, n++,****fx0 = f[x0];****fpx0 = f'[x0];****x1 = x0 - $\frac{fx0}{fpx0}$;****e = k * Abs[x1 - x0]²;****Print["n = ", n, " x_n = ", x1,****" f(x_n) = ", f[x1], " f'(x_n) = ", f'[x1] " e_n = ", e];****x0 = x1****]****n = 0 x_n = 2.4 f(x_n) = -4.65147 f'(x_n) = -7.9252****n = 1 x_n = 1.81308 f(x_n) = 13.5698 f'(x_n) = -49.8609 e_n = 1.69323****n = 2 x_n = 2.08523 f(x_n) = 1.9102 f'(x_n) = -33.783 e_n = 0.36407****n = 3 x_n = 2.14178 f(x_n) = 0.126863 f'(x_n) = -29.2591 e_n = 0.0157152****n = 4 x_n = 2.14611 f(x_n) = 0.00076956 f'(x_n) = -28.904 e_n = 0.0000924073****n = 5 x_n = 2.14614 f(x_n) = 2.907×10⁻⁸ f'(x_n) = -28.9018 e_n = 3.48438×10⁻⁹****n = 6 x_n = 2.14614 f(x_n) = -8.97141×10⁻¹⁵ f'(x_n) = -28.9018 e_n = 4.97273×10⁻¹⁸**

(Debug) In[222]:=

Log2[$\frac{2.4 - 1.8}{10^{-17}}$] - 1.

(Debug) Out[222]=

54.7358

(Debug) In[169]:=

$$\text{Ceiling}\left[\text{Log2}\left[\frac{2.4 - 1.8}{10^{-17}}\right] - 1.\right]$$

(Debug) Out[169]=

55

ж) Метода на допирателните е по-ефективен, защото чрез по-малко итерации достигаме до резултата.

Зад2.

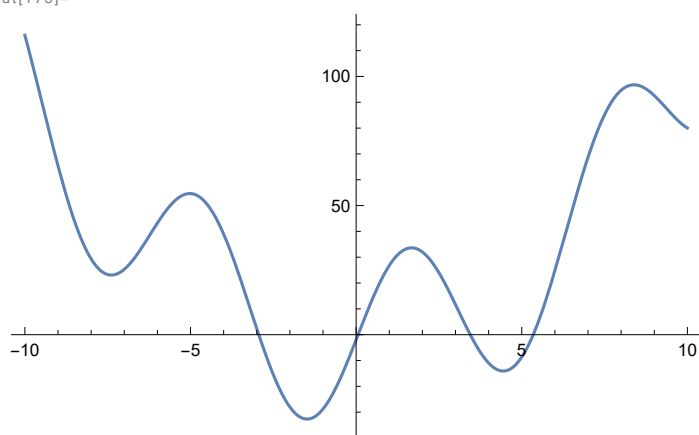
(Debug) In[170]:=

$$F[x_] := x^2 - 33 * \text{Sin}\left[x + \frac{\pi}{0+1}\right] - (0+2*1)$$

(Debug) In[173]:=

$$\text{Plot}[F[x], \{x, -10, 10\}]$$

(Debug) Out[173]=



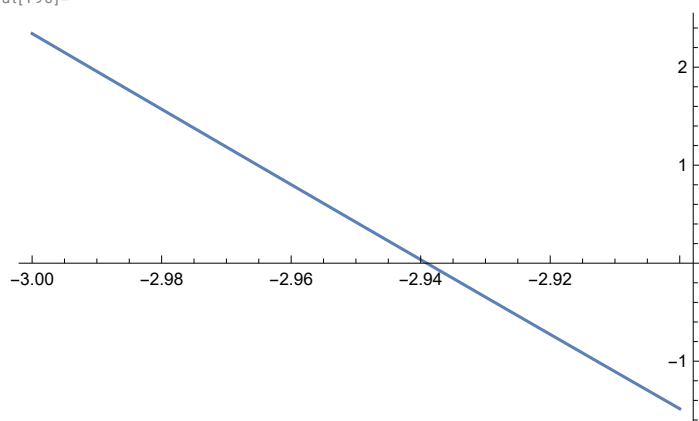
Извод: Общия брой корени на уравнението е 4.

б)

(Debug) In[190]:=

$$\text{Plot}[F[x], \{x, -3, -2.9\}]$$

(Debug) Out[190]=



(Debug) In[195]:=

$$F[-3.]$$

(Debug) Out[195]=

2.34304

```
(Debug) In[187]:=
```

```
F[-2.9]
```

```
(Debug) Out[187]=
```

```
-1.48523
```

Извод:

(1) $f(x)$ е непрекъсната в избрания интервал $[-3; -2.9]$, $x \in \mathbb{R}$.

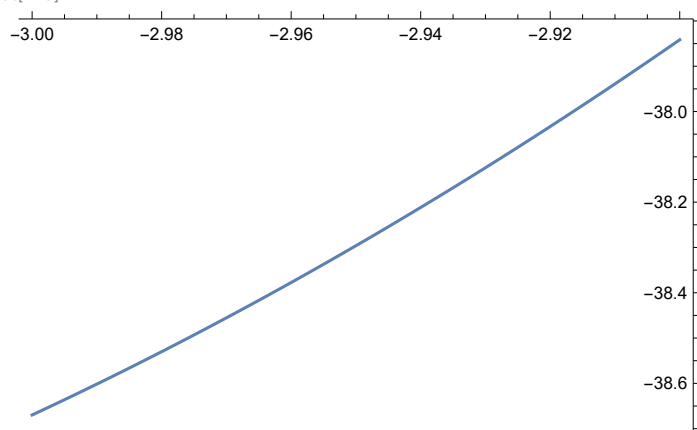
(2) $f(-3) = 2.34... > 0$, $f(-2.9) = -1.48... < 0$. Следователно $f(-3) \cdot f(-2.9) < 0$.

От (1) и (2) следва, че в интервала $[-3; -2.9]$ съществува поне един корен.

```
(Debug) In[193]:=
```

```
Plot[F'[x], {x, -3, -2.9}]
```

```
(Debug) Out[193]=
```

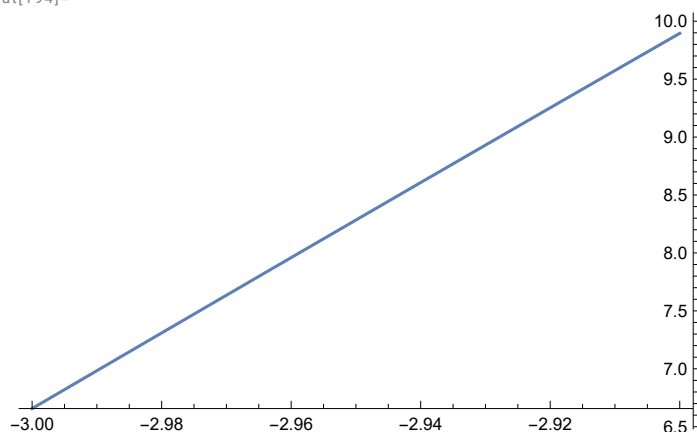


Извод: (3) Стойностите на първата производна са между $(-35; -40)$. Следователно в посочения интервал $[-3; -2.9]$ първата производна има само отрицателни стойности.

```
(Debug) In[194]:=
```

```
Plot[F''[x], {x, -3, -2.9}]
```

```
(Debug) Out[194]=
```



Извод: (4) Стойностите на втората производна са между $(0; 10)$. Следователно в посочения интервал $[-3; -2.9]$ втората производна има само положителни стойности.

Извод: От (3) и (4) следва, че методът на Нютон е приложим за посочения интервал (условията за сходимост са изпълнение).

г)

 $x_0 = ?$, такова че $f(x_0) \cdot f'(x) > 0$.Т.к. в дадената задача $f'(x) > 0$ (вж. (4)), следва да изберем x_0 така, че $f(x_0) > 0$.

(Debug) In[196]:=

F[-3.]

(Debug) Out[196]=

2.34304

(Debug) In[197]:=

x0 = -3

(Debug) Out[197]=

-3

д)

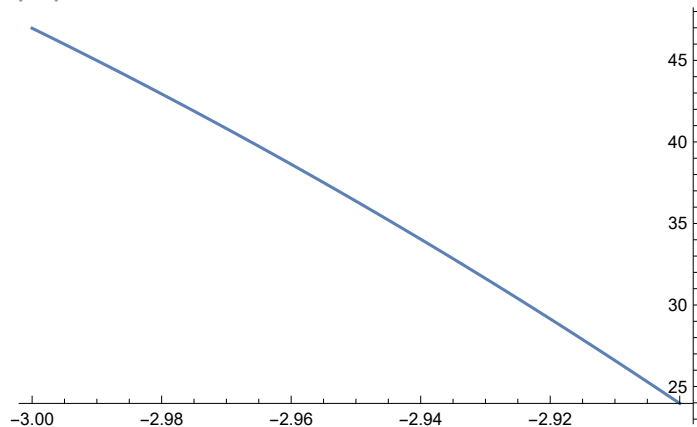
Определяне на постоянните величини

 $M_2 = ?$, $m_1 = ?$ $M_2 = ?$

(Debug) In[198]:=

Plot[Abs[f' '[x]], {x, -3, -2.9}]

(Debug) Out[198]=



От геометрични съображения следва, че максимумът се достига в левия край на интервала.

(Debug) In[235]:=

Clear[M2, m1, k]

(Debug) In[236]:=

M2 = Abs[f' '[-3.]]

(Debug) Out[236]=

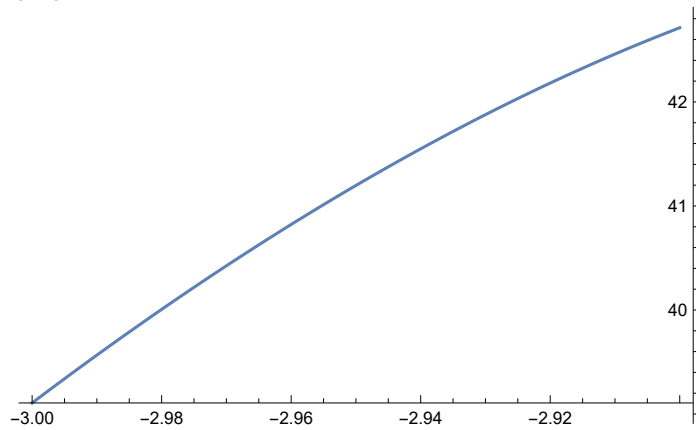
46.9731

 $m_1 = ?$

```
(Debug) In[237]:=
```

```
Plot[Abs[f'[x]], {x, -3, -2.9}]
```

```
(Debug) Out[237]=
```



От геометрични съображения следва, че минимумът се достига в десния край на интервала.

```
(Debug) In[238]:=
```

```
m1 = Abs[f'[-2.9]]
```

```
(Debug) Out[238]=
```

```
42.7132
```

```
(Debug) In[239]:=
```

$$k = \frac{m2}{2 m1}$$

```
(Debug) Out[239]=
```

```
0.549866
```

(Debug) In[263]:=

```

F[x_] := x^2 - 33 * Sin[x +  $\frac{\pi}{0+1}$ ] - (0 + 2 * 1)

a = -3.; b = -2.9;
x0 = -3.;
M2 = Abs[f'[-3.]];
m1 = Abs[f'[-2.9]];
k =  $\frac{M2}{2 m1}$ ;
Print["n = ", 0, " xn = ", x0, " F(xn) = ", F[x0], " F'(xn) = ", F'[x0]]
ezad = 0.0000000001;
e = Infinity;
For[n = 1, e ≥ ezad, n++,
  Fx0 = F[x0];
  Fpx0 = F'[x0];
  x1 = x0 -  $\frac{Fx0}{Fpx0}$ ;
  e = k * Abs[x1 - x0]^2;
  Print["n = ", n, " xn = ", x1,
    " F(xn) = ", F[x1], " F'(xn) = ", F'[x1] " en = ", e];
  x0 = x1
]

```

n = 0 x_n = -3. F(x_n) = 2.34304 F'(x_n) = -38.6698

n = 1 x_n = -2.93941 F(x_n) = 0.0134281 F'(x_n) = -38.2066 e_n = 0.00201871

n = 2 x_n = -2.93906 F(x_n) = 5.33039×10^{-7} F'(x_n) = -38.2036 e_n = 6.7922×10^{-8}

n = 3 x_n = -2.93906 F(x_n) = 4.44089×10^{-15} F'(x_n) = -38.2036 e_n = 1.07045×10^{-16}

(Debug) In[261]:=

$$\text{Log2}\left[\frac{-2.9 - (-3)}{0.0000000001}\right] - 1.$$

(Debug) Out[261]=

28.8974

(Debug) In[262]:=

$$\text{Ceiling}\left[\text{Log2}\left[\frac{-2.9 - (-3)}{0.0000000001}\right] - 1.\right]$$

(Debug) Out[262]=

29

ж) Метода на допирателните е по-ефективен, защото чрез по-малко итерации достигаме до резултата.