

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ПУ "Паисий Хилендарски"

Бистра Царева

УЧЕБНО ПОМАГАЛО

за учебната дисциплина

СИНТЕТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНО ПОМАГАЛО ПО СИНТЕТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Учебната дисциплина Синтетична геометрия съдържа две части: проективна геометрия и дескриптивна геометрия и се преподава на специалностите Математика, Математика и информатика (с хорариум 60 часа лекции и 40 часа упражнения), Физика и Математика (с хорариум 30 часа лекции и 30 часа упражнения). Лекциите следват учебника "Синтетична геометрия" с автор доц.д-р Бистра Царева.

Обучението завършва с изпит, като оценката се формира върху следните компоненти:

1. Решаване на задачи с ползване на учебника за справка върху теорията.
2. Доказване на теореми без да се използва литература за справка. Теоремите са селектирани в 4 групи в зависимост от трудността на доказателството им. Всеки студент сам избира групата теореми, върху която ще бъде изпитан в устна беседа от преподавателя, с което определя и диапазона на точките, които ще получи за тази част от изпита.
3. Курсова работа, състояща се от 10 задачи, които се представят последователно всяка седмица на упражнения.
4. Присъствие и активност по време на занятията.

В последните години осезателно се чувства необходимост от учебно помагало, което да подпомогне подготовката и изграждането на умения на студентите върху решаване на задачи. Ръководството за решаване на задачи по синтетична геометрия (1992) съдържа голям обем и разнообразие на задачи, съответстващи на по-голям хорариум от аудиторни часове, което затруднява студента в избора на най-подходящите задачи. Освен това то е изчерпано с изключение на малкото екземпляри, останали във факултетската библиотека.

Последната глава на новото издание на учебника "Синтетична геометрия" (2010) съдържа задачи по проективна и дескриптивна геометрия, които са тематично подредени съобразно учебната програма и са достатъчни както за провеждане на упражненията, така и за самостоятелната работа на студентите, но липсват решения (както изисква системата на изпитване).

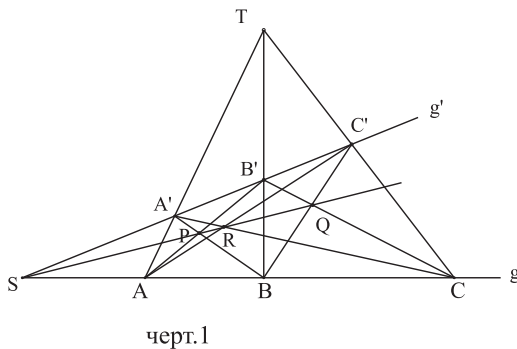
Настоящото учебно помагало е притурка към учебника по Синтетична геометрия, в която са дадени решения и упътвания на подбрани задачи, така че студентът да се учи и сам да се справя с решаването на задачите в тази учебна дисциплина. За студентите, които имат по-широки интереси препоръчваме Ръководството за решаване на задачи по синтетична геометрия (1992).

1 Задачи по проективна геометрия

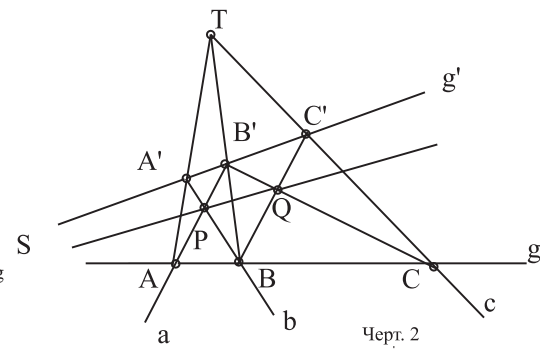
Перспективни триъгълници. Принцип за дуалност

Аксиома A_5 е инструмент за доказване на колинеарност на три точки. Достатъчно е да посочим подходяща двойка триъгълници, удовлетворяващи условията на аксиома A_5 . За да докажем, че четири точки са колинеарни е достатъчно да докажем, че две тройки от тези четири точки са колинеарни.

Задача 1. (черт.1) От условието $AA', BB', CC' \in T$, Определение 2.3 и аксиома A_5 следва, че двойките триъгълници $AB'C$, $A'BC'$ и ABC' , $A'B'C$ са перспективни и съответно тройките точки P, Q, S и S, Q, R са колинеарни. Тъй като точките Q и S са общи за двете прави, определени от тези тройки точки, то те съвпадат или четирите точки P, Q, R, S са колинеарни.



черт.1



Черт. 2

Задача 2. (черт.2) За решението на тази задача прилагаме задача 1.

Построяваме произволни прави $a \ni P$ и $b \ni P$. Означаваме : $a \cap g = A$, $a \cap g' = B'$, $b \cap g = B$, $b \cap g' = B'$ и $AA' \cap BB' = T$. Построяваме трета произволна права $c \ni T$ и нека $c \cap g = C$, $c \cap g' = C'$. Тъй като $\triangle AB'C$ и $\triangle A'BC'$ имат перспективен център T , то съгласно аксиома A_5 точките $P = AB' \cap A'B$, $S = AC \cap A'C'$ и $Q = B'C \cap BC'$ са колинеарни, т.е. търсената права PS съвпада с правата PQ , която можем да построим.

Задача 3. Избираме произволна точка $T \in CC'$ и построяваме произволни прави $g \ni T$ и $l \ni T$. Нека $g \cap a = A$, $g \cap c = A'$, $l \cap b = B$, $l \cap d = B'$. $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ удовлетворяват условията на аксиома A_5 , тъй като имат перспективен център T . Тогава точките $AB \cap A'B' = R$, $BC \cap B'C' = b \cap d = Q$, и $AC \cap A'C' = a \cap c = P$ са колинеарни. Така намерихме точка R , която лежи върху търсената права PQ . Сега прилагаме задача 2 за правите a , c и точка R .

Твърдение A'_5 (дуално на аксиома A_5), известно още като теорема на Дезарг за перспективните триъгълници, е средство, посредством което доказваме, че три прави минават през една точка.

Задача 4.(черт.3) Да означим трите триъгълника с $A_iB_iC_i$, $i = 1, 2, 3$, а общият им перспективен център - с T . От условието следва колинеарност на четворките точки A_1, A_2, A_3, T ; B_1, B_2, B_3, T ; C_1, C_2, C_3, T ; . Трите перспективни оси t_1, t_2, t_3 се определят с точките $P_1, Q_1, R_1 \in t_1$, $P_2, Q_2, R_2 \in t_2$, $P_3, Q_3, R_3 \in t_3$, където

$$(1.1) \quad \begin{aligned} A_2B_2 \cap A_3B_3 &= P_1, & A_3B_3 \cap A_1B_1 &= P_2, & A_1B_1 \cap A_2B_2 &= P_3, \\ B_2C_2 \cap B_3C_3 &= Q_1, & B_3C_3 \cap B_1C_1 &= Q_2, & B_1C_1 \cap B_2C_2 &= Q_3, \\ C_2A_2 \cap C_3A_3 &= R_1, & C_3A_3 \cap C_1A_1 &= R_2, & C_1A_1 \cap C_2A_2 &= R_3. \end{aligned}$$

Да допуснем, че точките P_1, P_2, P_3 са колинеарни. Следователно $P_1P_2 = P_2P_3 \iff A_3B_3 = A_1B_1$, което противоречи на условието, че $\triangle A_3B_3C_3$ и $\triangle A_1B_1C_1$ са перспективни. Следователно допускането не е вярно и точките P_1, P_2, P_3 не са колинеарни. Аналогично се доказва, че и тройката точки Q_1, Q_2, Q_3 не са колинеарни. Значи съществуват $\triangle P_1P_2P_3$ и $\triangle Q_1Q_2Q_3$, които ще разгледаме. Тъй като съгласно условието точките

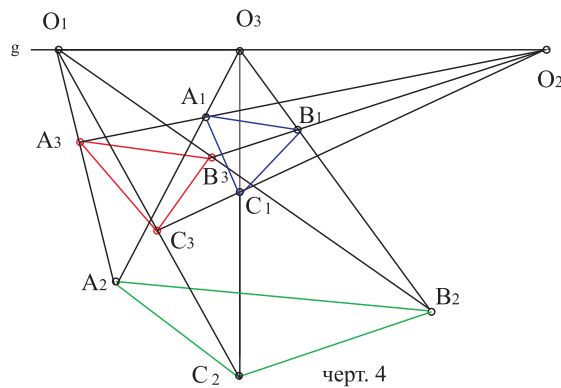
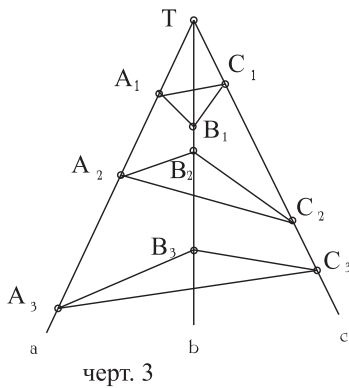
$$P_1P_2 \cap Q_1Q_2 = A_3B_3 \cap B_3C_3 = B_3,$$

$$P_2P_3 \cap Q_2Q_3 = A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1,$$

$$P_3P_1 \cap Q_3Q_1 = A_2B_2 \cap B_2C_2 = B_2$$

са инцидентни с права b , то прилагайки A'_5 получаваме, че $\triangle P_1P_2P_3$ и $\triangle Q_1Q_2Q_3$ са перспективни с перспективна ос b и следователно имат перспективен център $O = P_1Q_1 \cap P_2Q_2 \cap P_3Q_3 = t_1 \cap t_2 \cap t_3$. С това доказахме, че трите перспективни оси t_1, t_2, t_3 на дадените в условието триъгълници минават през една точка O .

Дуална задача. Да се докаже, че ако три триъгълника са два по два перспективни с обща перспективна ос, то трите им перспективни центъра лежат на една права.



Задача 5. (черт.4) Нека $\triangle A_2B_2C_2$ и $\triangle A_3B_3C_3$ са перспективни с перспективен център O_1 , $\triangle A_3B_3C_3$ и $\triangle A_1B_1C_1$ са перспективни с перспективен център O_2 , а

$\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ са перспективни с перспективен център O_3 .

За да начертаем триъгълниците, удовлетворяващи условието на задачата, фиксираме точките $O_1, O_2, O_3 \in g$ и избираме произволно перспективните триъгълници $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ с перспективен център O_3 .

Тогава $A_3 = O_1A_2 \cap O_2A_1$, $B_3 = O_1B_2 \cap O_2B_1$, $C_3 = O_1C_2 \cap O_2C_1$.

Точка $A_3 \notin A_1A_2$. Допускането на противното означава съвпадане на правите A_1A_2 и A_2A_3 , от където следва съвпадане на центровете O_1 и O_3 , което противоречи на условието. И така тройките точки A_1, A_2, A_3 ; B_1, B_2, B_3 ; C_1, C_2, C_3 са неколинеарни.

Ще използваме означенията (1.1) на задача 4. Следователно трябва да докажем, че трите перспективни оси $t_1 \ni P_1, Q_1, R_1$, $t_2 \ni P_2, Q_2, R_2$, $t_3 \ni P_3, Q_3, R_3$, съвпадат. За целта разглеждаме $\triangle A_1A_2A_3$ и $\triangle B_1B_2B_3$. Лесно се проверява, че тези триъгълници са перспективни с перспективна ос g . Тогава от твърдение A'_5 следва, че правите A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 са инцидентни с една точка, т.е.

$A_2B_2 \cap A_3B_3 = A_3B_3 \cap A_1B_1 = A_1B_1 \cap A_2B_2 \iff P_1 = P_2 = P_3$.

Аналогично, след разглеждане на $\triangle C_1C_2C_3$ и $\triangle B_1B_2B_3$, установяваме $Q_1 = Q_2 = Q_3$. Следователно $t_1 = t_2 = t_3$.

Пълен четириъгълник. Хармонични групи

Задача 6. (черт.3.3, учебник, стр.13). Съгласно Определение 4.1 имаме хармоничните групи $H(QR, P_1P_2)$, $H(RP, Q_1Q_2)$, $H(PQ, R_1R_2)$, а съгласно Теорема 5.2 имаме хармоничните групи $H(AB, PP_2)$, $H(CD, PP_1)$, $H(AD, QQ_1)$, $H(BC, QQ_2)$, $H(AC, RR_1)$, $H(BD, RR_2)$.

Задача 7. (черт.3.3, учебник, стр.13). **7.а)** Виж Теорема 3.1.

7.б) Разглеждаме $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ и можем да запишем: $AC \cap BR_2 = AC \cap BD = R$, $AD \cap BQ_2 = AD \cap BC = Q$, $CD \cap R_2Q_2 = P^*$. Но $RQ \cap CD = P_1$, а съгласно 7.а) $P_1 \in R_2Q_2$. Тогава $P^* \equiv P_1 = CD \cap R_2Q_2 \cap RQ$ или $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ имат перспективна ос, определена от точките R, Q, P_1 . Следователно условията на Твърдение A'_5 са изпълнени и перспективните $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ имат перспективен център $F = AB \cap CR_2 \cap DQ_2$.

7.в) Хармоничната група $H(BP, AF)$ следва от Определение 4.1, приложено за пълния четириъгълник DRQ_2C .

Задача 8. Виж Основна задача на стр.15 от учебника.

Задача 9. Виж Теорема 4.2 на стр.15 от учебника.

Задача 10. Достатъчно е да се намери образът X' на произволна точка $X \in g = MN$, така че да е в сила $H(MN, XX')$. За целта виж Основна задача на стр.15 от учебника.

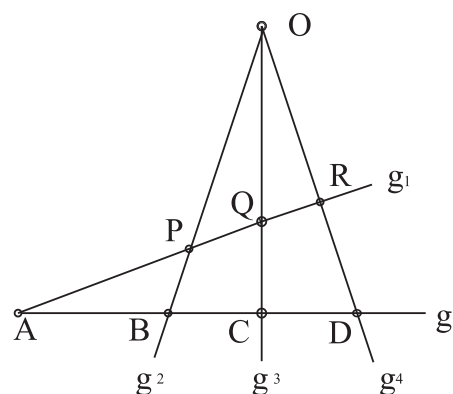
Перспективност

Задача 11. Задачата е решена в хода на доказателството на Теорема 8.6, I). Виж учебника, стр.31, 32.

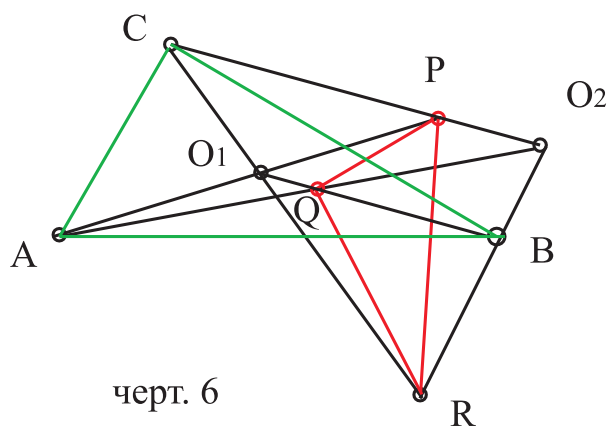
Задача 12. Задачата е решена в хода на доказателството на Теорема 8.6, III). Виж учебника, стр.32.

Задача 13. (черт.5) Избираме произволна права $g_1 \ni A$ и произволна точка $O \notin g$ и $O \notin g_1$. Да означим : $BO = g_2$, $CO = g_3$, $DO = g_4$. Разгледайте следните последователности от перспективности :

$$13.1 \quad g \stackrel{O}{\bar{\bar{\wedge}}} g_1 \stackrel{C}{\bar{\bar{\wedge}}} g_2 \stackrel{R}{\bar{\bar{\wedge}}} g ; \quad 13.2 \quad g \stackrel{O}{\bar{\bar{\wedge}}} g_1 \stackrel{B}{\bar{\bar{\wedge}}} g_3 \stackrel{R}{\bar{\bar{\wedge}}} g ; \quad 13.2 \quad g \stackrel{O}{\bar{\bar{\wedge}}} g_1 \stackrel{B}{\bar{\bar{\wedge}}} g_4 \stackrel{Q}{\bar{\bar{\wedge}}} g ;$$



черт. 5



черт. 6

Теорема на Пап. Проективност, инволюция, допълване.

Задача 14. (черт.6) **Упътване:** Означете с O_1 и O_2 перспективните центрове съответно на двойките перспективни триъгълници $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ и $\triangle ABC$, $\triangle QPR$. Приложете теоремата на Пап за тройките колинеарни точки A, P, O_1 и B, R, O_2 и на края въз основа на получения резултат, приложете теоремата на Дезарг (A'_5), за да докажете, че правите AR, BP, CQ минават през една точка. Следвайки Определение 9.1 и твърдението, че всяка перспективност е проективност, разбираме, че конструкцията за допълване на перспективностите е вложена в техните Определения 5.4 и 5.5. Тогава произволна проективност може да се допълва, ако предварително я разложим на произведение от перспективности.

Най-простата конструкция за допълване на проективност, индуцирана между два реда точки с различни носители, се основава на Теоремата на Пап.

Задача 15. (черт.7) Задача 15 е основната задача в серията задачи за допълване на проективност. Решението ѝ протича в следния ред:

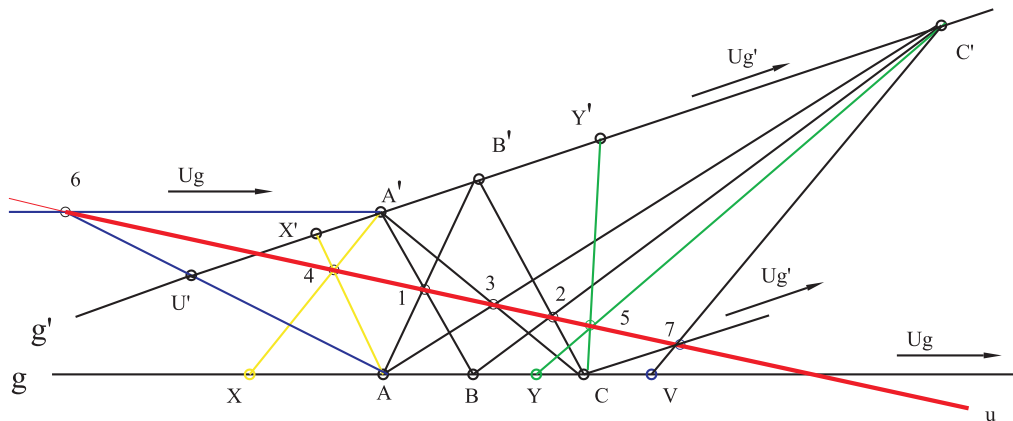
- 1) Построяваме колинеационната ос u на проективността φ , избирайки две измежду следните три точки : $AB' \cap A'B = 1$, $BC' \cap B'C = 2$, $AC' \cap A'C = 3$.
- 2) Разлагаме проективността φ на произведение от перспективности : $\varphi = \pi_2 \circ \pi_1$, където $g \stackrel{A'}{\pi_1} \bar{\bar{\wedge}} u \stackrel{A}{\pi_2} \bar{\bar{\wedge}} g'$ или $\varphi = \pi_4 \circ \pi_3$, където $g \stackrel{C'}{\pi_3} \bar{\bar{\wedge}} u \stackrel{C}{\pi_4} \bar{\bar{\wedge}} g'$. Изборът на центровете измежду дадените двойки съответни точки е свободен и съобразен с по-добрата

нагледност на чертежа.

3) $\varphi(X) = \pi_2 \circ \pi_1(X) = \pi_2(4) = X'$; $\varphi^{-1}(Y') = \pi_3^{-1} \circ \pi_4^{-1}(Y') = \pi_3^{-1}(5) = Y$;

4) Намирането на убежните точки повтаря построенията от 3. За да оперирате с лекота с безкрайните точки и прави, прочетете отново § 22, защото чертежите се изпълняват в евклидовия модел на проективното пространство.

$\varphi(U_g) = \pi_2 \circ \pi_1(U_g) = \pi_2(6) = U'$; $\varphi^{-1}(U_{g'}) = \pi_3^{-1} \circ \pi_4^{-1}(U_{g'}) = \pi_3^{-1}(7) = V$.

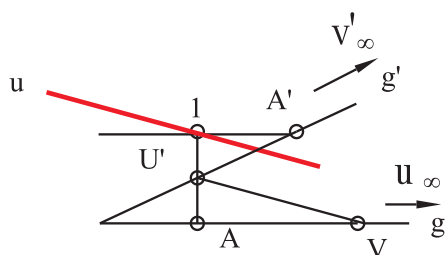


черт. 7

Задача 16. Означението за безкрайната точка U_g на правата g не е единствено. Прието е тя да се отбелязва още и по следния начин U_∞ или G_∞ . В следващите задачи ще се срещат и тези означения.

Решенията на задачи 16.1 и 16.2 са директно повторение на основната задача 15.

16.2 (черт.8) Тук убежните точки са зададени и следователно ще се използват при определяне на колинеационната ос $u = (AU' \cap A'U_\infty)(VU' \cap V'_\infty U_\infty) =$



черт. 8

$= 1(VU' \cap \omega) = 1(U_{VV'})$,
т.е. u минава през точка 1
и е успоредна на правата
 VU' . Намирането на X' и Y'
повтаря построенията 2) и 3)
от решението на задача 15.

Решенията на задачи 16.3, 16.4 ...16.7 се свеждат до основна задача 15 чрез подходяща последователност от перспективности.

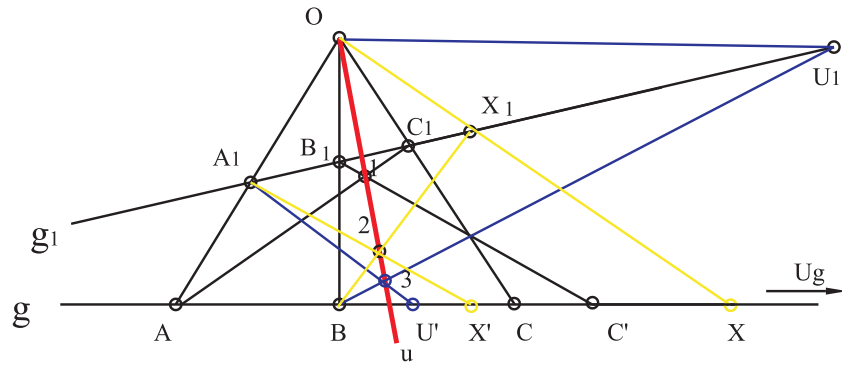
16.3 (черт.9) Тъй като съществува поне една точка A , за която $\varphi^2(A) = \varphi(\varphi(A)) = \varphi(B) = A$ и $B \neq A$, то съгласно Теорема 10.1 φ е инволюция.

Чрез една централна перспективност ще сведем тази задача до задача 15. Избираме произволен ред g_1 и произволна точка O , $O \notin g$, $O \notin g'$. Нека разгледаме

централната перспективност $g \xrightarrow[\pi]{O} g_1$, при която $\pi(A, B, C) = A_1, B_1, C_1$. Тогава от схемата

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\varphi} & g' \\ \pi \downarrow & & \\ g_1 & \nearrow \psi & \end{array}$$

е видно, че $\psi = \varphi \circ \pi^{-1}$ е проективност и $\psi(A_1, B_1, C_1) = B, A, C'$. Тогава колинеационната ос на ψ е: $u = (A_1A \cap BB_1)(A_1C' \cap BC_1) = O1$ и $\psi = \pi_2 \circ \pi_1$, където $g_1 \xrightarrow[\pi_1]{A_1} u \xrightarrow[\pi_2]{B} g'$. Сега можем да допълваме φ , защото $\varphi = \psi \circ \pi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi$. Така $\varphi(X) = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi(X) = \pi_2 \circ \pi_1(X_1) = \pi_2(2) = X'$.



ЧЕРТ.9

Тъй като φ е инволюция, то $\varphi = \varphi^{-1}$ и следователно не е нужно да се търси първообраз на точка от g . Това обяснява и защо φ има само една убежна точка $U' : \varphi(U_\infty) = \psi \circ \pi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi(U_\infty) = \pi_2 \circ \pi_1(U_1) = \pi_2(3) = U'$.

16.6 (черт.10) Да изберем произволен ред $g \notin S(O_\infty)$ и чрез перспективността $S(O_\infty) \xrightarrow[\pi]{O} g$ да сведем задачата до основната задача 15. Нека $\pi(a, b, c) = A, B, C$. Тогава, както е видно от схемата

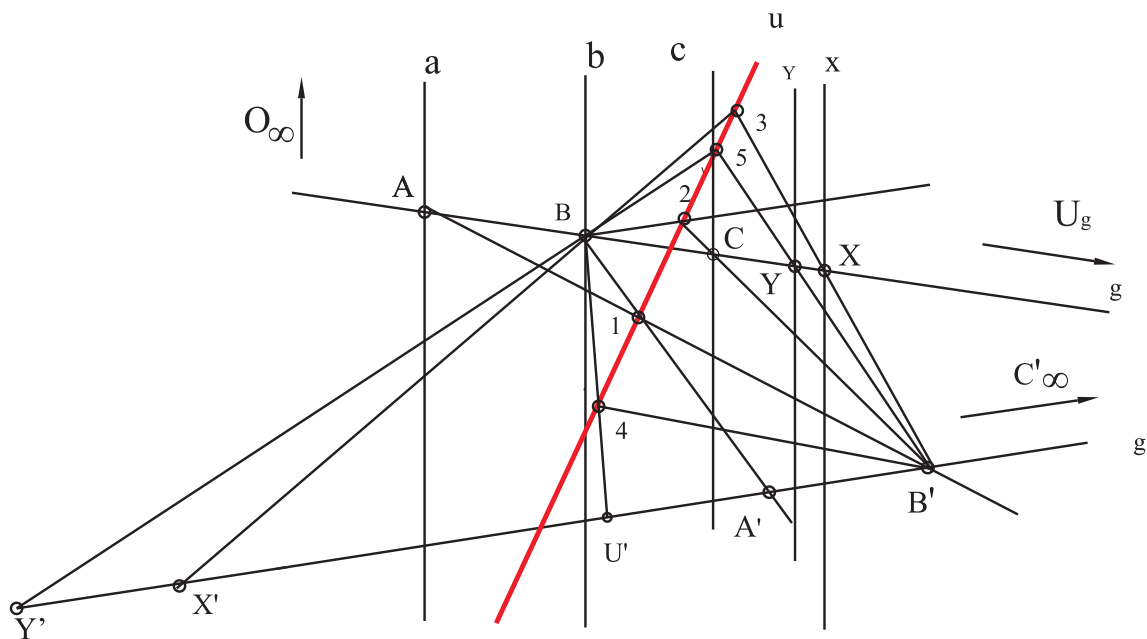
$$\begin{array}{ccc} S(O_\infty) & \xrightarrow{\varphi} & g' \\ \pi \downarrow & & \\ g & \nearrow \psi & \end{array},$$

се индуцира проективност $\psi = \varphi \circ \pi^{-1}$, така че $\psi(A, B, C) = A', B', C'_\infty$. Следователно колинеационната ос на ψ е: $u = (AB' \cap A'B)(BC'_\infty \cap B'C) = 12$ и

$\psi = \pi_2 \circ \pi_1$, където $g \xrightarrow[\pi_1]{B'} u \xrightarrow[\pi_2]{B} g'$. Сега можем да допълваме φ , защото $\varphi = \psi \circ \pi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi$ и $\varphi^{-1} = \pi^{-1} \circ \psi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2^{-1}$. Така, ако $x \in S(O_\infty)$ е произволна права и $Y' \in g'$ е произволна точка, то
 $\varphi(x) = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi(x) = \pi_2 \circ \pi_1(X) = \pi_2(3) = X'$,
 $\varphi(\omega) = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi(\omega) = \pi_2 \circ \pi_1(U_g) = \pi_2(4) = U'$,
 $\varphi^{-1}(Y') = \pi^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2^{-1}(Y') = \pi^{-1} \circ \pi_1^{-1}(5) = \pi^{-1}(Y) = y$.

Нека припомним, че чертаем в евклидовия модел на проективната равнина и за това не можем да начертаем на чертежа безкрайната права ω . В същото време:

- 1) можем да си избираме точки от ω , разбира се безкрайни;
- 2) можем да намираме пресечната точка на ω с произволна крайна права - това е единствената безкрайна точка, чийто представител е крайната права.



черт.10

16.7 Виж §9 - Допълване на проективност, случай 2), на стр. 36, 37 на учебника. Различното в тази задача е съвпадането на центровете на двата снопа прави. Подходът за свеждане на задачата до задача 15, както и ходът на решението са същите.

Когато проективността φ е индуцирана върху един и същи ред и в условието на задачата е зададена поне една двойна точка, то съществува по-лека конструкция за допълване на φ от разглежданата до сега. Достатъчно е произволно избраният ред да минава двойната точка.

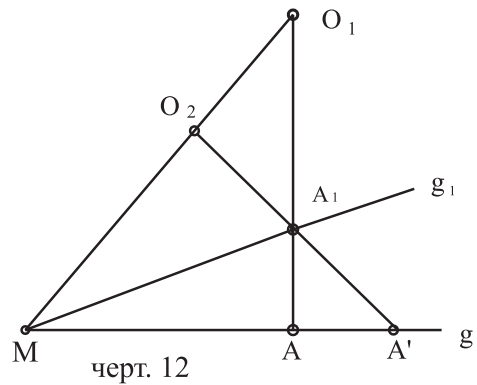
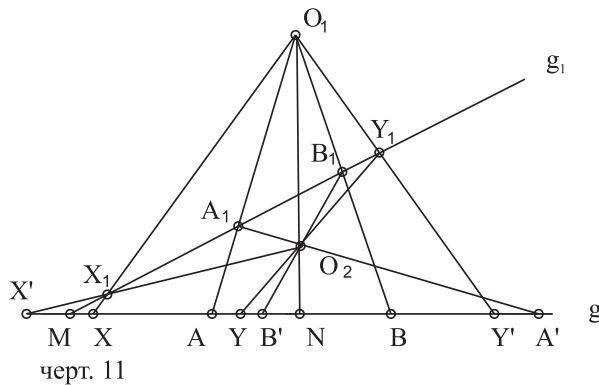
16.8 (черт.11) Нека изберем произволна права $g \ni M$ и произволна точка $O_1 \notin g$, $O_1 \notin g_1$ и нека $\pi_1(M, A, B) = M, A_1, B_1$. Тогава φ има представянето $\varphi =$

$\pi_2 \circ \pi_1$, където $g \xrightarrow[\pi_1]{O_1} g_1 \xrightarrow[\pi_2]{O_2} g$, а $O_2 = A_1A' \cap B_1B'$. Сега записваме :

$$\varphi(X) = \pi_2 \circ \pi_1(X) = \pi_2(X_1) = X', \quad \varphi^{-1}(Y') = \pi_1^{-1} \circ \pi_2^{-1}(Y') = \pi_1^{-1}(Y_1) = Y.$$

Леко се проверява, че $N = O_1O_2 \cap g$ е втората двойна точка на φ .

16.9 (черт.12) Следвайте хода на решение на задача 16.8. Но сега $O_2 = A_1A' \cap O_1M$, за да няма втора двойна точка.



16.10 Съгласно Теорема 10.4 и Следствие 10.2 φ има втора двойна точка $N : H(AA_1, MN)$. За допълването на φ виж задача 10.

Задача 17. I. Нека φ_1 е параболичната проективност и нека $\varphi_1(M) = M$. Тъй като $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$, то ако $\varphi_2 \circ \varphi_1(M) = \varphi_2(M) = M'$, то и $\varphi_1 \circ \varphi_2(M) = \varphi_1(M') = M'$. Понеже φ_1 е параболична проективност, то $M' = M$. Следователно $\varphi_2(M) = M$, т.е. φ_2 има поне един двоен елемент и той е M .

II. Допускаме, че φ_2 има втори двоен елемент $N, N \neq M$, т.е. $\varphi_2(N) = N$. Тогава от $\varphi_1 \circ \varphi_2(N) = \varphi_1(N) = N'$, $\varphi_2 \circ \varphi_1(N) = \varphi_2(N') = N'$ и φ_1 е параболична проективност следва, че N' е трети двоен елемент за φ_2 . Тогава съгласно Теорема 8.4 φ_2 съвпада с идентитета, което противоречи на условието. Следователно допускането не е вярно и φ_2 няма втори двоен елемент, т.е. φ_2 е параболична проективност.

Задача 18. Да означим дадените прави с a и b , дадените колинеарни точки с P, Q, R , а триъгълникът с ABC като $A \in a, B \in b, AC \ni R, AB \ni Q, BC \ni P$. Проверете дали следната последователност от осев перспективности

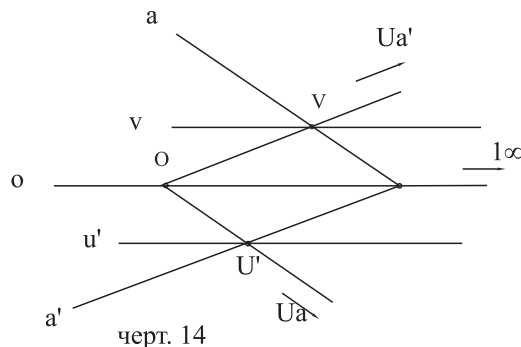
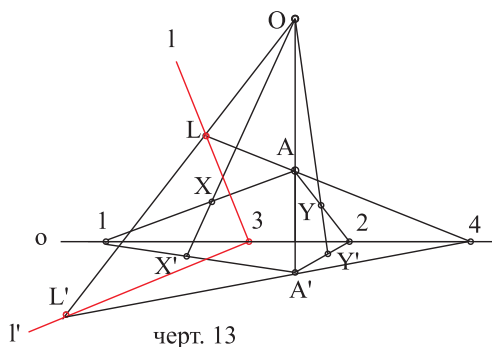
$S(R) \xrightarrow[\pi_1]{a} S(Q) \xrightarrow[\pi_2]{b} S(P)$ описва $\triangle ABC$. Като използвате Теорема 8.8 докажете, че проективността $\varphi = \pi_1 \circ \pi_2$ е осева перспективност, което означава, че върхът C описва оста на φ .

Задача 19. Докажете, че произведението на следните осев перспективности $S(K) \xrightarrow[\pi_1]{AC} S(L) \xrightarrow[\pi_2]{BC} S(K) \xrightarrow[\pi_3]{AB} S(L)$ е осева перспективност.

Хомология

Задача 20.1 (черт.13) Нека X е произволна точка. Да намерим точка $X' = \phi(X)$. Съгласно Свойство 3 на хомологията (стр.46, учебника) точка $X' \in OX$. Нека $AX \cap o = 1$ и $\phi(AX) = A'X'$. Тогава съгласно Свойство 4 на хомологията (стр.46, учебника) $1 \in A'X'$. Следователно $X' = OX \cap 1A'$.

Нека Y' е произволна точка. Да намерим точка $Y = \phi^{-1}(Y')$. Отново прилагаме последователно Свойства 3 и 4 на хомологията, съгласно които $Y \in OY'$ и $Y \in 2A$, където $2 = A'Y' \cap o$. Така получаваме $Y = OY' \cap 2A$.



За да намерим образа (респ. първообраза) на произволна права е достатъчно да намерим образите (респ. първообразите) на две нейни точки. Удобна е пресечната точка на правата с оста, защото съгласно Свойство 1 (стр.46, учебника) на хомологията, тя е двойна точка.

Нека l е произволна права. Да намерим правата $l' = \phi(l)$. Нека $l \cap o = 3$, а $L \in l$ е произволна точка. Тогава $\phi(l) = \phi(3L) = \phi(3)\phi(L) = 3L'$, където точката $L' = \phi(L)$ е намерена по начина, описан по-горе.

Задача 21. (черт.14) Ще намерим убежните прави на специалната хомология $\phi(O, o; a \rightarrow a')$ (виж Определение 12.1). Нека $\omega \cap o = 1_\infty$, а $U_\infty \in \omega$ е произволна точка. Тогава $\phi(\omega) = \phi(1_\infty U_\infty) = \phi(1_\infty)\phi(U_\infty) = 1U' = u'$. За конкретната задача, когато е зададена двойка съответни прави е много удобно точка U_∞ да не е произволна, а да е безкрайната точка на правата a , т.е. $U_a = U_\infty$. Тогава $OU_\infty \cap a' = U'$.

По аналогичен начин построяваме и втората убежна права v , която също ще бъде успоредна на o , защото минава през двойната точка 1_∞ . Да запишем по-подробно $v = \phi^{-1}(\omega) = \phi^{-1}(1_\infty U_{a'}) = \phi^{-1}(1_\infty)\phi^{-1}(U_{a'}) = 1_\infty V$, където $V = OU_{a'} \cap a$.

Задача 22. Прилагайки директно свойствата на хомологията, намираме:

22.1 $O = AA' \cap BB'$, $o = (AB \cap A'B')X$;

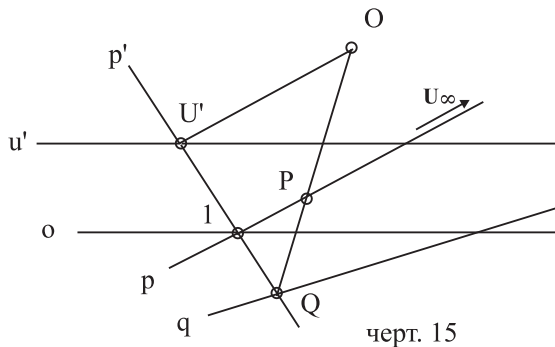
22.1 $o = (a \cap a')(b \cap b')$, $O = [(a \cap b)(a' \cap b')] \cap x$.

Задача 23. Построяваме произволна права $c \ni O$. Съгласно Свойство 2 на хомологията $\phi(c) = c$. Тъй като $\phi(A'X = a) = A'X = a'$, то $\phi(C = a \cap c) = a' \cap c = C'$. Тогава точката $Y = BC \cap B'C'$ лежи върху оста o на ϕ или $o = XY$.

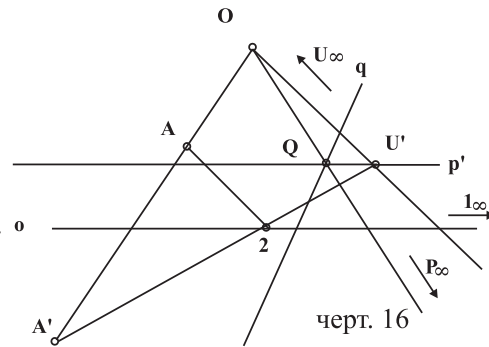
Задача 24. Изберете две произволни точки $1, 2 \in o$ и с помощта на правите $A1, B2$ и техните образи намерете нова двойка съответни точки за хомологията ϕ .

Задача 25. Упътване. Намерете правата $p' = \phi(p)$ и тогава $Q = p' \cap q$, а $P = \phi^{-1}(Q) = OQ \cap p$.

25.3 (черт. 15) Нека $p \cap o = 1$ и $p \cap \omega = U_\infty$. Тъй като $\phi(U_\infty) = OU_\infty \cap u' = U'$, то $\phi(p = 1U_\infty) = \phi(1)\phi(U_\infty) = 1U' = p'$.



черт. 15

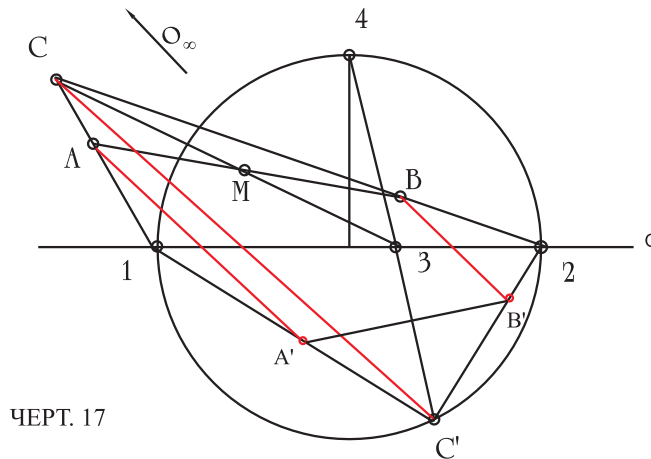


черт. 16

25.4 (черт. 16) Сега $\phi(p = \omega) = u'$ е убежна права за ϕ . Нека $\omega \cap o = 1_\infty$, а U_∞ е произволна безкрайна точка. Ако $AU_\infty \cap o = 2$, то $\phi(AU_\infty) = \phi(A)\phi(U_\infty) = A'U' = A'2$. Тогава $U' = OU_\infty \cap A'2$, а $u' = 1_\infty U'$. Следователно $Q = u' \cap q$, а $P_\infty = \omega \cap OQ$.

Задача 26.2 (черт.17) За да се намери афинната хомология ϕ , удовлетворяваща условията на задачата, е достатъчно да се намери двойка съответни точки. Нека $\phi(ABC) = A'B'C'$ и $\angle A'C'B' = 90^\circ$. Следователно ще потърсим точка $C' = \phi(C)$. Да означим: $AC \cap o = 1$, $BC \cap o = 2$. Тогава точка C' принадлежи на геометричното място на точките, от които отсечката 12 се вижда под прав ъгъл, т.е. C' принадлежи на окръжност $k(d = 12)$.

Нека CM е медиана на $\triangle ABC$ и $CM \cap o = 3$. Тогава $\phi(CM) = C'M' = C'3$. Съгласно Теорема 24.4, Теорема 11.3 и Определение 8.1 $C'3$ ще бъде медиана и в $\triangle A'B'C'$. Но тъй като $\triangle A'B'C'$ е равнобедрен, то $C'3$ ще бъде и негова ъглополовяща. Това е възможно, само когато $C'3$ разполовява дъгата $\widehat{12}$, т.е. $C'3 \ni 4$, където $\widehat{14} = \widehat{24}$. Така показахме, че правите $C'3$ и 43 съвпадат или $C' = k \cap 34$. Безкрайната точка $O_\infty = CC' \cap \omega$ е център на търсената афинна хомология. Тогава $A' = AO_\infty \cap 1C'$, $B' = BO_\infty \cap 2C'$.



ЧЕРТ. 17

Задача 27. Постройте главните направления на афинната хомология ϕ като използвате двойката съответни точки Z, Z' . (задачата е решена в учебника

на стр.97-98) Върху двойките перпендикулярни прави, минаващи през Z и Z' ще лежат диагоналите съответно на ромба и на квадрата. Дължината на диагонала на квадрата се определя от условието, че страната му е с дължина 3 см.

Задача 28. Упътване. Ако $\phi_1(O_1, o; A \rightarrow A_1)$ и $\phi_2(O_2, o; A \rightarrow A_2)$ са дадените хомологии, то достатъчно е да се докаже, че o е двоен ред точки за $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$, а O_1O_2 е двойна права за $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ и да се приложат свойствата на хомологията.

Конични сечения

Задача 29. Нека точка P е външна за коничното сечение C . Да означим с t_1 и t_2 допирателните прави през P към C , а допирните им точки да означим съответно с T_1 и T_2 . Съгласно Определения 15.2, 15.3, 14.3, 14.1 точка P е спрегната с точките T_1 и T_2 и следователно полярата на P минава през тях.

Дуално твърдение: Докажете, че полюсът на всяка секуща за коничното сечение C е пресечната точка на допирателните прави към C през пресечните точки на секущата с C .

Задача 30. Нека κ е полярността, породила коничното сечение $C(\kappa)$. Съгласно Теорема 19.1 правата на Паскал за шестоъгълника $ABCDEF$, вписан в коничното сечение $C(\kappa)$, е $s = (AB \cap DE)(BC \cap EF) = PQ$. Съгласно Теорема 19.2 точката на Брианшон за шестостранника, описан около коничното сечение $C(\kappa)$, е $S = [(ab)(de)] \cap [(bc)(ef)] = p \cap q$. Полярността е корелация и съгласно Определение 13.1 можем да запишем : $\kappa(ab) = \kappa(a)\kappa(b) = AB$, $\kappa(de) = \kappa(d)\kappa(e) = DE$, което означава $\kappa(p) = AB \cap DE = P$. Аналогично се доказва $\kappa(q) = Q$. Следователно $\kappa(s) = \kappa(PQ) = \kappa(P)\kappa(Q) = p \cap q = S$.

Задача 31. Означете страните на $\triangle ABC$: $AB = k, BC = l, CA = m$ и приложете Теоремата на Брианшон за правите $kkllmm$.

Приложение на теоремите на Паскал и Брианшон за намиране на шеста точка и шеста права, принадлежащи на коничното сечение.

Теоремата на Паскал се прилага, когато се търси втората пресечна точка на дадено конично сечение с дадена права, т.е. едната пресечна точка вече е известна.

Задача 32.1 (черт.18) Нека x е произволна права, минаваща през една от дадените точки, напр. A . Търсим втората пресечна точка X на правата x с кривата от втора степен $k(ABCDE)$.

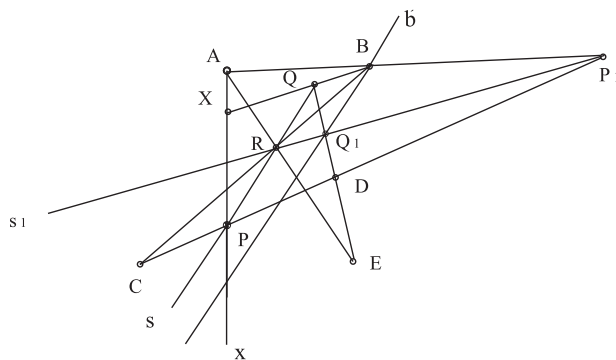
1) Определяме мястото на шестата точка X : $AXBCDE$

В конкретния случай X трябва да стои до точка A , защото $X, A \in x$.

2) Прилагаме Теоремата на Паскал : $A, X, B, C, D, E \in k(ABCDE) \iff P = AX \cap CD, Q = XB \cap DE, R = BC \cap EA$ са колинеарни точки.

3) Построение : 3.1 $P = x \cap CD$; 3.2 R ; 3.3 $s = PR$; 3.4 $Q = s \cap DE$;

3.5 $X = x \cap BQ = AP \cap BQ$.



черт. 18

Допирателна права се намира чрез Теоремата на Паскал като два пъти последователно се запише допирната точка.

Задача 32.2 Да приемем стандартното означение за допирателната права в точка B - b . (чертежът на зад.32 е общ за двете подусловия)

1) $b : ABBCDE$.

2) $A, B \in b, C, D, E \in \mathbf{C}(ABCDE) \iff P_1 = AB \cap CD, Q_1 = BB \cap DE, R_1 = BC \cap EA$ са колинеарни точки.

3) Построение : 3.1 P_1 ; 3.2 $R_1 = R$; 3.3 $s_1 = P_1R_1$; 3.4 $Q_1 = s_1 \cap DE$; 3.5 $b = BQ_1$.

Дуална задача. Нека е $K(abcde)$ крива от втори клас, съдържаща правите a, b, c, d, e , никои три от които не минават през една точка. Да се построят :

32.1 (д) произволна права $x \in K$;

32.2 (д) да се намери допирната точка B на K с b .

Теоремата на Брианшон се прилага, когато се търси втората допирателна на дадено конично сечение през дадена точка, т.е. едната допирателна вече е известна.

Задача 32.2 (д) Да приемем стандартното означение за допирна точка - B на допирателна права b .

Допирна точка се намира чрез Теоремата на Брианшон като два пъти последователно се запише допирателната права.

1) $B : abbcd$.

2) $a, b \ni B, c, d, e \in \mathbf{C}(abcde) \iff$ правите $p = (ab)(cd), q = (bb)(de), r = (bc)(ea)$ минават през една точка.

3) Построение : 3.1 p ; 3.2 r ; 3.3 $S = p \cap r$; 3.4 $q = S(de)$; 3.5 $B = b \cap q$.

Предлагаме на любознателния читател сам да изпълни чертежите.

Задача 33. Кривата от втора степен $\mathbf{k}$ е зададена по следния начин : $k(A \in a, B \in b)$ (следваме означенията, въведени в §17 на учебника) и правата на Паскал s .

1) Прилагаме Теоремата на Паскал за точките : $AABBCC$.

$A \in a, B \in b, C \in c \in \mathbf{k} \iff$ точките $P = a \cap BC, Q = AB \cap c, R = b \cap CA$ лежат върху дадената права на Паскал s .

2) Построение : От $P = a \cap s; R = b \cap s; \implies C = BP \cap AR$ и $c = QC = (AB \cap s)C$.

Задача 35.2 (черт.19) Записът $\mathbf{h}(U_\infty, A \in a, B \in b)$ е еквивалентен на записа $\mathbf{h}(U_\infty, AABB)$. Да означим асимптотите с t_1 и t_2 . Те са допирателни към $\mathbf{h}$ съответно в точките $U_\infty, V_\infty \in h$.

1) Намираме t_1 , прилагайки Теоремата на Паскал за точките $(U_\infty U_\infty AAB B)$ (виж задача 32.2).

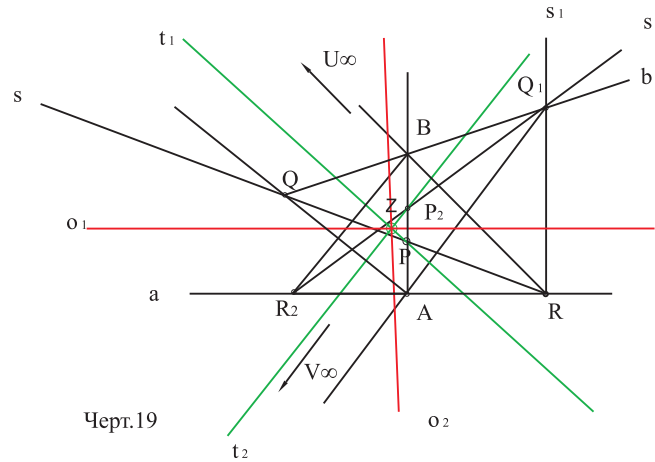
$U_\infty U_\infty AAB B \in \mathbf{h} \iff$ точките $P = t_1 \cap AB$, $Q = U_\infty A \cap b$, $R = a \cap BU_\infty$ са инцидентни с една права s . Построение: $P = QR \cap AB$, $t_1 = PU_\infty$.

2) Определяме втората безкрайна точка V_∞ на $\mathbf{h}$ като втора пресечна точка на безкрайната права ω с $\mathbf{h}$, отново прилагайки Теоремата на Паскал за точките $(U_\infty V_\infty AAB B)$ (виж задача 32.1 и отчети $U_\infty V_\infty = \omega$, $\omega \cap AB = U_{AB}$).

$U_\infty V_\infty AAB B \in \mathbf{h} \iff$ точките $P_1 = \omega \cap AB = U_{AB}$, $Q_1 = V_\infty A \cap b$, $R_1 = a \cap BU_\infty = R$ са инцидентни с една права s_1 . Построение: $Q_1 = RU_{AB} \cap b$, $V_\infty = Q_1 A$.

3) Намираме t_2 , прилагайки Теоремата на Паскал за точките $(V_\infty V_\infty AAB B)$ (виж задача 32.2).

$V_\infty V_\infty AAB B \in \mathbf{h} \iff$ точките $P_2 = t_2 \cap AB$, $Q_2 = V_\infty A \cap b = Q_1$, $R_2 = a \cap BV_\infty$ са инцидентни с една права s_2 . Построение: $P_2 = Q_1 R_2 \cap AB$, $t_2 = P_2 V_\infty$.



Черт.19

4) Точката $Z = t_1 \cap t_2$ е център на хиперболата. (виж §25, Определения 25.3, 25.7)

5) Осите на хиперболата o_1 и o_2 са ъглополовящи на ъглите, определени от асимптотите (виж Теорема 27.6).

Задача 36.1 (черт. 20) Записът $\pi(A \in a, B \in b)$ е еквивалентен на записа $\pi(aabb\omega)$ (виж Определение 25.2). Да означим с U_∞ безкрайната точка на параболата, с v върховата допирателна, с o оста, а с V върхът ѝ.

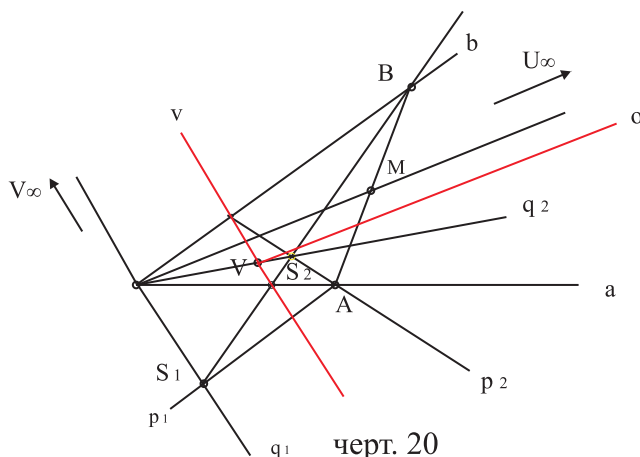
1) U_∞ е допирната точка на ω с π . Ето защо намираме U_∞ , прилагайки Теоремата на Брианшон за правите $aabb\omega$. (виж задача 32.2 (д))

Правите $a, a, b, b, \omega, \omega \in \pi \iff$ правите $p = (aa)(b\omega)$, $q = (ab)(\omega\omega)$, $r = (bb)(\omega a)$ минават през една точка S . Построение :

$p = AU_b$, $r = BU_a$, $S = p \cap r$, $q = (ab)S$, $U_\infty = q \cap \omega = U_q$.

Забележка. Описаният по-горе подход за намиране на безкрайната точка на параболата е универсален. За конкретната задача съществува и по-кратък подход,

базиращ се на обстоятелството, че всички диаметри на параболата минават през нейния безкраен център, съвпадащ с безкрайната ѝ точка. Следователно достатъчно е да намерим един диаметър на параболата. Съгласно Теорема 16.3, 24.4 и задача 29 полярата на точка U_{AB} е правата $d = (ab)M$, където M е средата на хордата AB . Тогава $U_{\infty} = U_d$. Този подход е приложен на чертежа.



2) Нека означим с V_{∞} образа на U_{∞} за абсолютната инволюция (виж §26, Определение 26.1). Тогава върховата допирателна v е втората допирателна към π (първата е ω) през точка V_{∞} . Намираме v , прилагайки Теоремата на Брианшон за правите $aabb\omega v$. (виж задача 32.2 (д))

Правите $a, a, b, b, \omega, v \in \pi \iff$ правите $p_1 = (aa)(b\omega)$, $q_1 = (ab)(\omega v)$, $r_1 = (bb)(va)$ минават през една точка S_1 . Построение :

$p_1 = AU_b = p$, $q_1 = (ab)(\omega v) = (ab)V_{\infty}$, $S_1 = p_1 \cap q_1$, $r_1 = BS_1$, $v = (r_1 a)V_{\infty}$.

3) Върхът V е допирната точка на v с π . $V : aabbvv$

Построение: $p_2 = A(bv)$, $r_2 = B(va) = r_1$, $S_2 = p_2 \cap r_2$, $q_2 = (ab)S_2$, $V = q_2 \cap v$.

4) Оста $o = VU_{\infty}$.

Задача 37.2 Намираме точките $X = BQ \cap \mathbf{C}$ и $Y = CQ \cap \mathbf{C}$ (виж задача 32.1 и приложи Теоремата на Паскал последователно за точките $U_{\infty}U_{\infty}BXCD$ и $U_{\infty}U_{\infty}BYCD$). Прилагайки Теорема 16.5 за пълния четириъгълник $BXYC$, вписан в коничното сечение $\mathbf{C}$, построяваме полярата $q = (BY \cap CX)(BC \cap XY)$ на точка Q .

Задача 37.3 $\mathbf{C}$ е парабола, тъй като по условие безкрайната права ω е допирателна. Намираме точката $X = BQ_{\infty} \cap \mathbf{C}$, прилагайки теоремата на Паскал за точките $U_{\infty}U_{\infty}BXCC$ и нека точка M е средата на отсечката BX . От $H(BX, MQ_{\infty})$ и задача 29 следва, че полярата на Q_{∞} е правата $q = U_{\infty}M$, която е и диаметър на $\mathbf{C}$.

Задача 38. Упътване Достатъчно е да се определят още две точки от това конично сечение, като се използват хармоничните свойства на полюса и полярата (Теорема 16.3) и Основната задача на §4.

Задача 39. Съгласно Определение 25.3 полюсът на безкрайната права относно коничното сечение се нарича негов център. Да приемем означението Z за центъра. Вземайки предвид Определение 14.2, Теорема 14.2 и §16, разбираме, че за да намерим центъра е достатъчно да намерим полярите на две безкрайни точки (виж задача 37), т.е. да намерим два диаметъра. Тяхната пресечна точка е центърът. Построенията се намаляват с подходящ избор на безкрайните точки. Например, удобно е да се избере безкрайната точка на известна хорда на коничното сечение или безкрайната точка на допирателна в зададена негова точка. Нека с φ означим инволюцията на спрегнатите диаметри, индуцирана в центъра на коничното сечение.

Задача 39.1 $C(AABCD)$;

Търсим полярите d_1 и d_2 съответно на точките U_{AB} и U_{BC} :

1) $CU_{AB} \cap C = X$, $AU_{BC} \cap C = Y$ (за определянето на точките X и Y прилагаме Теоремата на Паскал съответно за точките $AABXCD$ и $AAUYBCD$).

2) Ако означим с 1, 2, 3, 4 средите съответно на хордите AB, CX, BC, AY , то $d_1 = 12$, $d_2 = 34$.

Тогава $Z = d_1 \cap d_2$ и ако $\varphi(d_1, d_2) = d'_1, d'_2$, то $d'_1 = ZU_{AB}$, $d'_2 = ZU_{BC}$.

Задача 39.2 $C(AAU_\infty U_\infty B)$;

Тъй като асимптотите са диаметри (виж Определение 25.7), то достатъчно е да намерим още само един диаметър d , например - полярата на точка U_a . Нека $BU_a \cap C = X$. Намираме точката X , прилагайки теоремата на Паскал за точките $AAU_\infty U_\infty BX$. Нека точка 1 е определена от хармоничната група $H(BX, 1U_a)$, т.е. точка 1 е средата на хордата BX (Теорема 24.4). Тогава $d = 1A$, а $Z = t \cap d$ и $\varphi(t, d) = t, d'$, където $d' = ZU_a$. Втората асимптота t_2 се определя от хармоничната група $H(dd', tt_2)$.

Забележка. Друго решение на задачата съдържа намиране на втората асимптота t_2 на дадената хипербола (виж решението на задача 35.2). Тогава $Z = t \cap t_2$, а инволюцията φ е напълно определена с двойните си елементи $\varphi(t, t_2) = t, t_2$, защото φ е h -изображение (Следствие 10.2).

Задача 39.3 $C(AAB; P_\infty, p)$, където точка P_∞ и права p са полюс и поляра относно коничното сечение C ;

1) Да намерим 5 точки от коничното сечение. Нека $AP_\infty \cap C = C$ и $AP_\infty \cap p = Q$. От $H(AC, QP_\infty)$ и Теорема 24.4 следва, че точка Q е среда на хордата AC . Така лесно намираме точка C . Ако $a \cap p = L$, то $c = LC$ е допирателната към C в точка C и можем да запишем $C(AABCC)$.

2) Дадената права p е диаметър, тъй като е поляра на безкрайна точка. Достатъчно е да намерим още един диаметър на C (виж задача 39.1).

Задача 39.4 $C(abcd\omega)$.

Центърът на параболата съвпада с безкрайната ѝ точка, която се намира чрез прилагане на Теоремата на Брианшон за правите $abcd\omega\omega$ (виж задача 36).

2 Задачи по дескриптивна геометрия

Поради спецификата на дескриптивната геометрия, глави *VI* и *VII* на учебника Синтетична геометрия, посветени на дескриптивната геометрия, съдържат изчерпателна информация, придружена с чертежи, за всички основни задачи като са разгледани и възможните частни случаи. Задачите по дескриптивна геометрия в глава *VIII* на учебника или се свеждат до тези основни задачи, или са набор от тях. Ето защо в настоящата притурка не са включени решения на задачите 40 -47 по дескриптивна геометрия, а само отправки към съответните параграфи и страници на учебника. Решени с чертежи са две от задачите на 48.

Аксонометрия

Задача 40. Изобразяването на точки, прави и равнини се извършва като предварително се намерят адаптираните координати на точките (виж учебника, §30, стр.121), а после построенията са аналогични на посочените в §32, стр.129 на учебника.

Да подредим в таблица параметрите, характеризиращи аксонометричния кръст на най-използваните проекции:

проекция	$\angle(x', y')$	$\angle(y', z')$	$\angle(z', x')$	p	q	r
кабинетна проекция	135°	135°	90°	1	$\frac{1}{2}$	1
кавалиерна перспектива	135°	135°	90°	1	1	1
военна перспектива	90°	135°	135°	1	1	1
увеличена правоъгълна изометрия	120°	120°	120°	1	1	1
увеличена правоъгълна диметрия	$131^\circ 25'$	$131^\circ 25'$	$97^\circ 10'$	1	$\frac{1}{2}$	1

Задача 41. Виж учебника, §32.2, стр.129.

Нека отбележим :

1) Всички следствия, записани в §32, 33, 34 на учебника, касаещи кабинетна проекция са в сила и за другите аксонометрични проекции, защото те следват от твърденията на §29.

2) Всички построения, описани в §32, 33, 34 на учебника, се повтарят и в другите аксонометрични проекции при отчитане на конкретния аксонометричен кръст и коефициенти на изменение за всяка от тях.

Задача 42. Виж учебника, §32.3, 32.5.1, Следствие 32.1. Справката обосновава построенията: $g_2 \ni N_2, g_2 \parallel x'; g_2 \cap c_2 = A_2; A' \in c', A_2 A' \parallel z'; g' = N' A'$.

Задача 43.

43.1 Задайте равнината α с две пресичащи се прави (напр. $a = AB$ и b) или с две успоредни прави $c \parallel b$, където $c \in A$. Дирите на α минават през стъпките на правите, лежащи в нея (виж Твърдение 29.3 и §33.2.1). Следователно

$m'_\alpha = M'_a M'_b$, $n'_\alpha = N'_a N'_b$ като много удобно е да се използва и точката $X'_\alpha = m'_\alpha \cap n'_\alpha \cap x'$.

43.2 Съгласно Твърдение 29.4 и §33.7.1 имаме $m'_\alpha = b_1$. Тъй като $m'_\alpha \cap x' = X'_\alpha$ и $m'_\alpha \cap y' = Y'_\alpha$, то $n'_\alpha \ni X'_\alpha$ и $n'_\alpha \parallel z'$, а $p'_\alpha \ni Y'_\alpha$ и $p'_\alpha \parallel z'$.

43.3 Съгласно Твърдение 29.5 и §33.7.2 имаме $n'_\alpha = b_2$. Тъй като $n'_\alpha \cap x' = X'_\alpha$ и $n'_\alpha \cap z' = Z'_\alpha$, то $m'_\alpha \ni X'_\alpha$ и $m'_\alpha \parallel y'$, а $p'_\alpha \ni Z'_\alpha$ и $p'_\alpha \parallel y'$.

Задача 44.

44.1 Виж §33.8.1 на учебника.

44.2 Виж §33.8.2 на учебника.

Задача 45.

45.1 Виж §33.9.1 на учебника.

45.2 Виж §33.9.3 на учебника.

Задача 46. Ако $\alpha \cap \beta \cap \gamma = Q$ и $\alpha \cap \beta = s$, $\beta \cap \gamma = k$, $\gamma \cap \alpha = l$, то $s \cap k \cap l = Q$. Очевидно е, че две от трите посочени пресечници са достатъчни. Използвайте §33.8 и преценявайте кои са най-удобните двойки равнини, за да намерите техните пресечници.

46.2 Отчетете, че $\alpha \perp \mu$ като $m'_\alpha = b_1$; $\beta \perp \nu$.

46.3 Отчетете, че $\alpha \perp \pi$ като $p'_\alpha = b_3$ и $\beta \perp \mu$.

Изберете произволна точка $M \in m_\gamma$ и намирайки втора стъпка на правата CM , постройте втората дъга на γ .

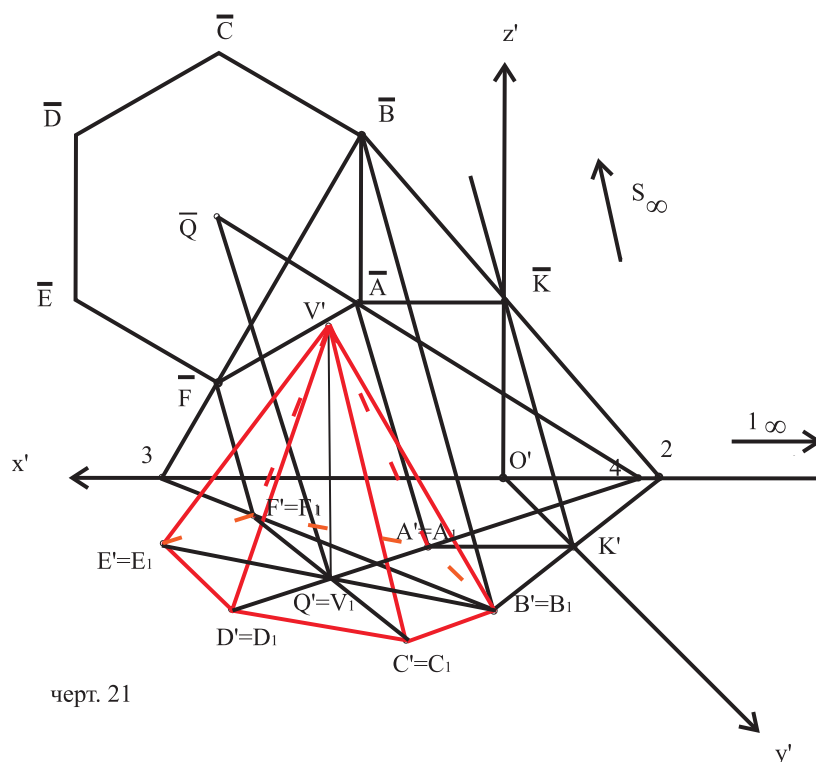
46.4 От $\delta \perp \nu$ и $\beta \parallel \delta$ следва $\beta \perp \nu$. Използвайте §34.3.1, за да постройте дъгите на β ($n'_\beta \ni F_2$ и $n'_\beta \parallel n'_\delta$). Тъй като $\gamma \parallel \nu$, то $\gamma \perp \mu$ и $\gamma \perp \pi$, което опростява посроенията.

Задача 47. Всяка от фигурите, която трябва да се изобрази, лежи в координатната равнина μ . За определяне на върховете на фигурите във всяка от задачите се налага да се извършат планиметрични построения. Както е показано в §31, стр.125-127 трябва да се извърши склопяване на μ до ν .

47.2 Центърът на шестоъгълника е точката $S = g \cap \mu = M_g$, т.е. първата стъпка на правата g .

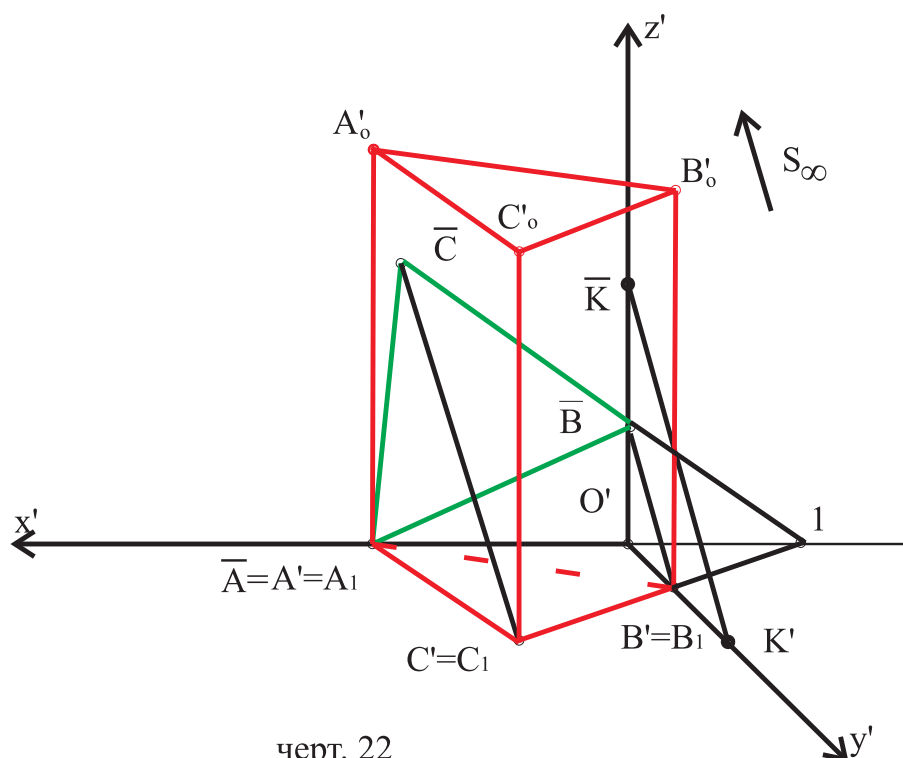
Задача 48. Основите на многостените, които трябва да се изобразят, са правилни многоъгълници и лежат в координатната равнина μ . Универсалният подход за определяне на основните върхове минава през склопяване на μ до ν (виж §31, стр.125-127). В някои от задачите основен ръб или диагонал е успореден на оста x или y . Така например в задачи 48.1, 48.2, 48.3 основният ръб $AB \parallel y$, а в зад. 48.8 основният ръб $AB \parallel x$. Сега имате избор или да склопявате μ до ν , или да прилагате построенията, предложени в §31, стр.123-125.

48.3 (черт. 21) Правилният шестоъгълник е еднозначно определен със страната си. Достатъчно е да намерим центърът Q на описаната около него окръжност. Това е третият връх на равнобедрен триъгълник със страна AB . Съществуват две възможности за местоположението на точка Q . Но главният аксонометричен образ на основата не е правилен шестоъгълник, поради което не можем да го построим директно. За да изобразим основата се налага да извършим склопяване на μ до ν (виж §31, стр.125-127). Ако $K' \in y'$ е произволна точка, то склопеното ѝ положение до ν е точката $\bar{K} \in z' = \bar{y}$, където $O'\bar{K} = 2 O'K'$. Така задаваме афинната хомология $\phi(x', K' \rightarrow \bar{K})$. Следователно безкрайната точка $U_{K'\bar{K}} = S_\infty$ е център на ϕ . Сега склопяваме последователно точките A' и B' . На черт. 23 е видно, че $A'K' \cap x' = 1_\infty$, а $B'K' \cap x' = 2$. Ето защо $\bar{A} = A'S_\infty \cap \bar{K}1_\infty$, а $\bar{B} = B'S_\infty \cap \bar{K}2$.



20

48.6 (черт. 22) От условието, че едната основа на призмата лежи в μ , а околнен ръб, например ръбът BB_o лежи в π , следва че основният връх $B \in y$.
 Задаваме афинната хомология $\phi(x', K' \rightarrow \bar{K})$ с ос x' и център безкрайната точка $U_{K'\bar{K}} = S_\infty$. Тъй като точка A лежи върху оста на хомологията, а както знаем всяка нейна точка е двойна, то $\bar{A} = A'$. За да построим равностранныя триъгълник $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$ използваме, че $\bar{B} \in \bar{y}$ и $\bar{B} \in \bar{k}(\bar{A}, r = 6)$.
 Следва отклоняване и получаваме : $B' = \bar{B}S_\infty \cap y'$ и $C' = \bar{C}S_\infty \cap 1B'$.
 Околните ръбове са успоредни на оста z , поради което и аксонометричните им образи са успоредни на оста z' . Дължината им се запазва 7, понеже $r = 1$.



черт. 22